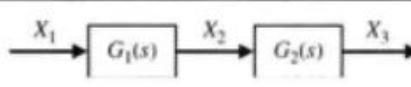
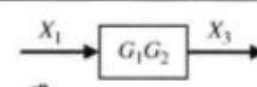
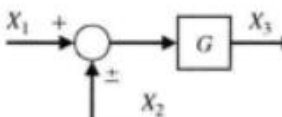
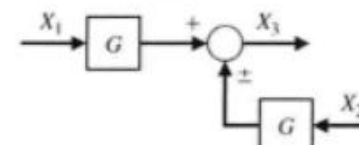
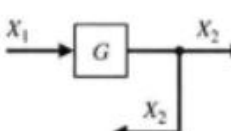
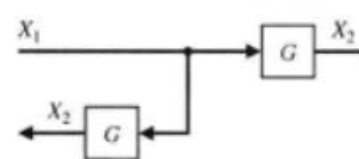
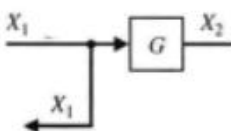
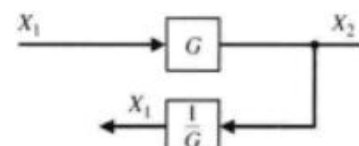
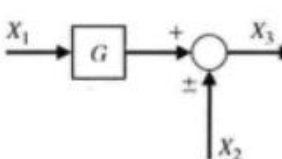
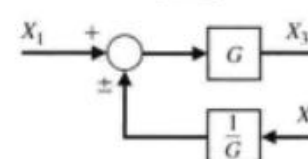
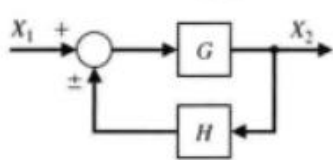
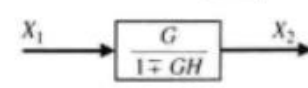




自控习题课

2025.06.13

Chap2——系统流程图化简

变 换	初 始 框 图	等 效 框 图
1. 合并串联方框		 或 
2. 相加点后移		
3. 分支点前移		
4. 分支点后移		
5. 相加点前移		
6. 消去反馈回路		

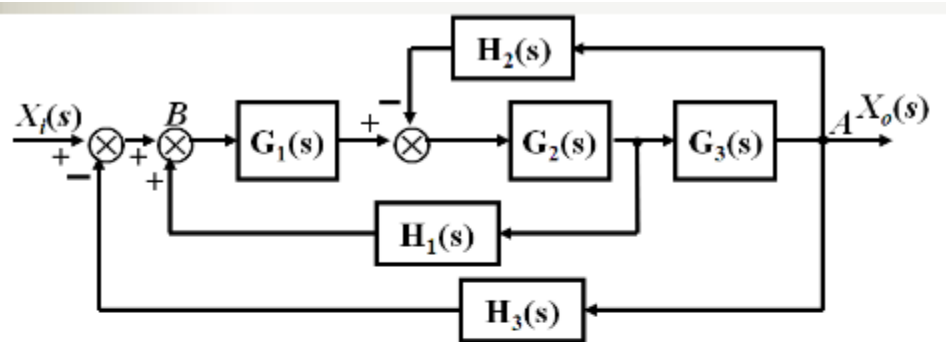
□ 分支点/相加点的前后移动：消除交叉回路

□ 反馈回路 → 前馈回路：从内层到外层

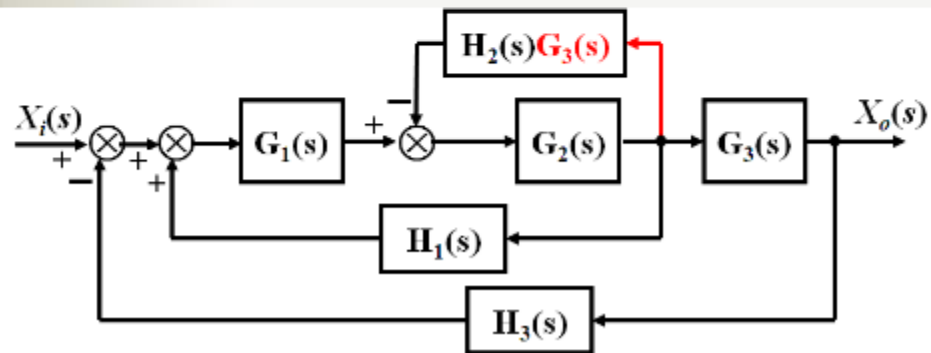
移动交叉回路分支点/相加点后，不能出现新的交叉回路！

Chap2—系统流程图化简

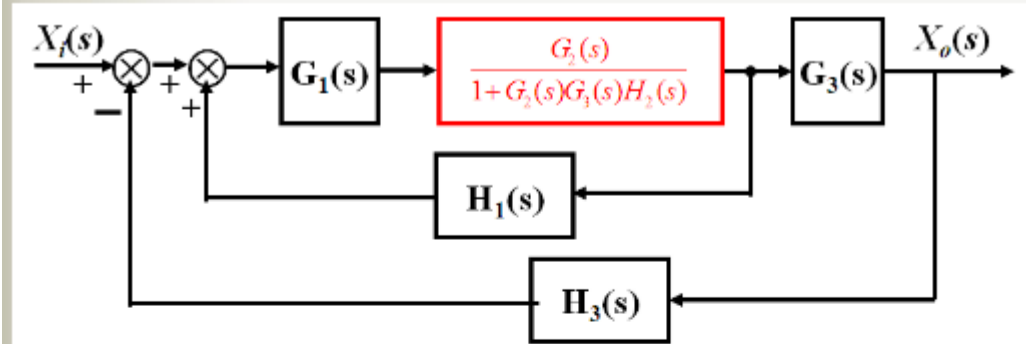
例：仅有一个交叉回路：移动分支点/相加点，逐级消除反馈回路



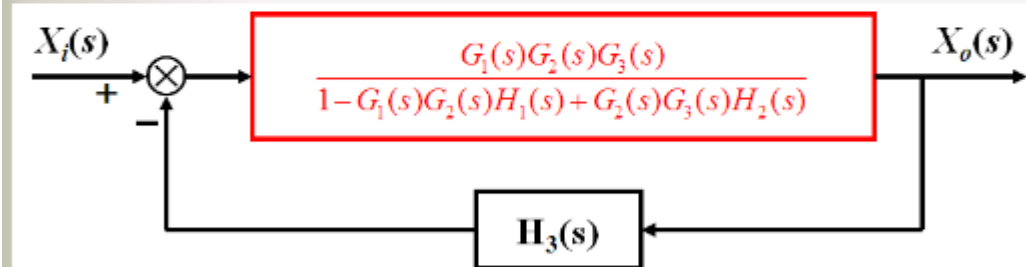
1. A点前移:



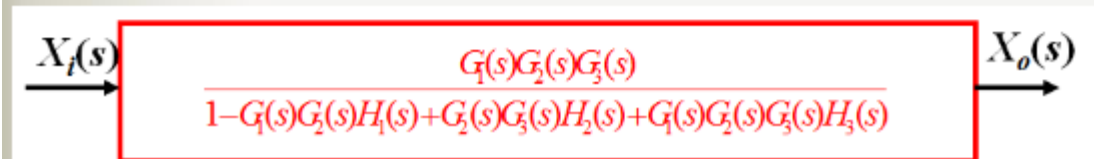
2. 消去 $H_2(s)G_3(s)$ 反馈回路:



3. 消去 $H_1(s)$ 反馈回路:

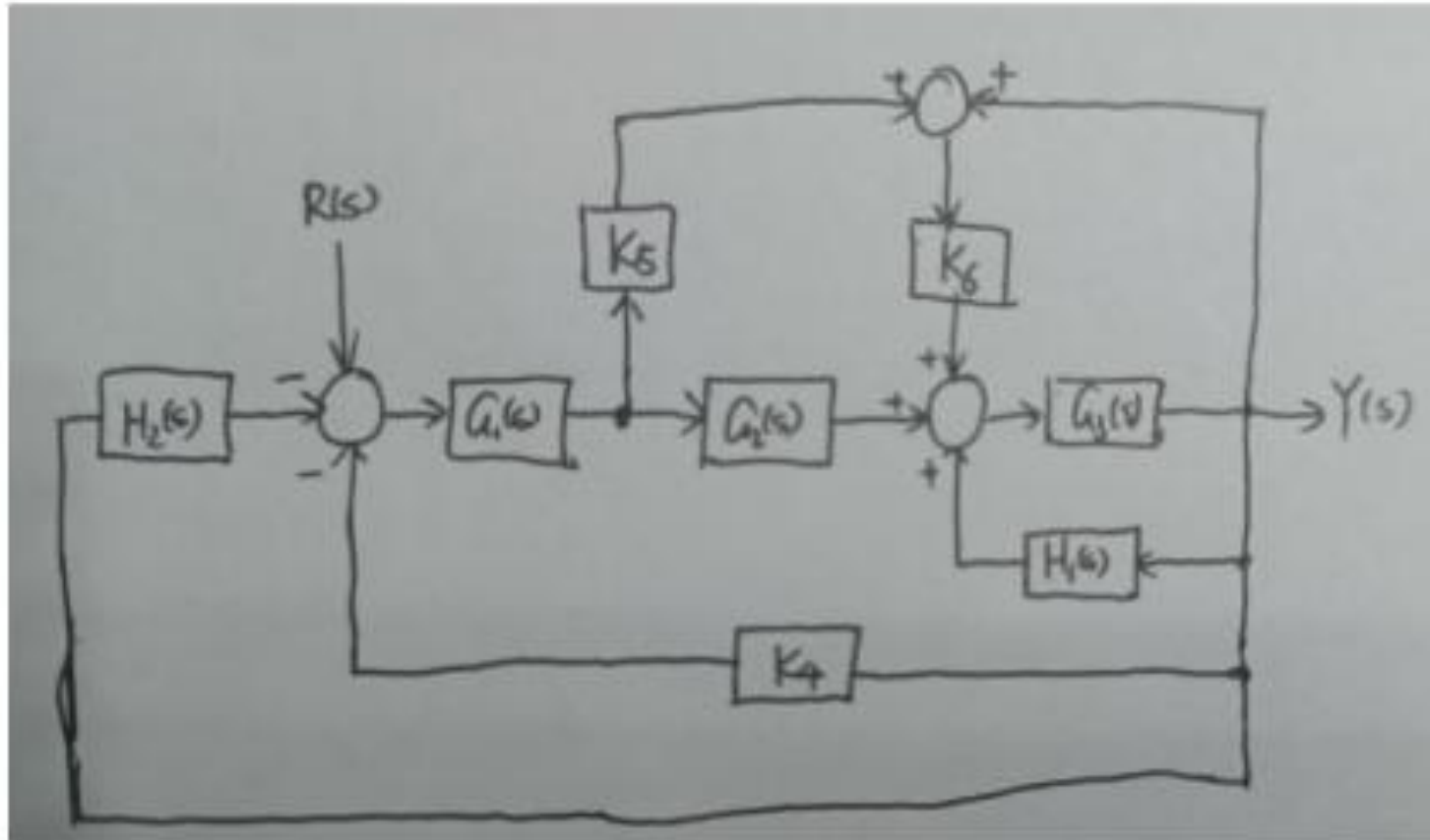


4. 消去 $H_3(s)$ 反馈回路:



Chap2——系统流程图化简

再例：2021年考试题



并联：直接相加

Chap2——物理系统的数学模型

➤ 求解微分方程获得**时间响应解Time-response solution**很困难，通过**拉普拉斯变换Laplace transformation**，将微分方程转变为容易求解的代数方程。求解步骤如下：

- 1) 建立系统的微分方程
- 2) 非线性微分方程线性化，得到线性微分方程
- 3) 求取线性微分方程的拉普拉斯变换
- 4) 对感兴趣的变量求解代数方程
- 5) 对代数方程的解求取拉普拉斯反变换

三部分：

- 物理系统→线性微分方程(理想元件)
- 时域微分方程→复频域代数方程(拉普拉斯变换)
- 代数方程求解→时域响应(拉普拉斯反变换)

Chap2——物理系统的数学模型

□物理系统→线性微分方程(理想元件)

元件类型	物理元件	微分方程	能量 E 或者功率 $\mathcal{P}$	符 号
感性储能元件	电感	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	
	平动弹簧	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	
	旋转弹簧	$\omega_{21} = \frac{1}{k} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	
	流体惯量	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} IQ^2$	

元件类型	物理元件	微分方程	能量 E 或者功率	符 号
容性储能元件	电容	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v_{21}^2$	
	平动质量	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v_2^2$	
	旋转质量	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega_2^2$	
	流体容量	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2$	
	热容量	$q = C_t \frac{dT_2}{dt}$	$E = C_t T_2$	
耗能型元件	电阻	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
	平动阻尼器	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b v_{21}^2$	
	旋转阻尼器	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b \omega_{21}^2$	
	流阻	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$	
	热阻	$q = \frac{1}{R_t} T_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} T_{21}$	

物理量符号说明

- 通过型变量: F = 力, T = 扭矩, i = 电流, Q = 流体体积流速, q = 热流速
- 跨越型变量: v = 平动速度, ω = 角速度, v = 电压, P = 压强, $\mathcal{T}$ = 温度
- 感应变量: L = 电感, $1/k$ = 平动或者转动刚度的倒数, I = 流体惯量
- 储能变量: C = 电容, M = 质量, J = 转动惯量, C_f = 流体容量, C_t = 热容
- 耗能变量: R = 电阻, b = 黏性摩擦系数, R_f = 流阻, R_t = 热阻

Chap2—物理系统的数学模型

□ 时域微分方程 → 复频域代数方程 (拉普拉斯变换)

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

默认直接保留第一项：以系统的零状态开始建模

这解释了为什么一些常数在微分方程组中未出现，例如重力。

Chap2—物理系统的数学模型

□ 代数方程求解→时域响应(拉普拉斯反变换)

$f(t)$	$F(s)$
阶跃函数 $u(t)$	$\frac{1}{s}$
脉冲函数 $\delta(t)$	1
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{d^k f(t)}{dt^k}$	$s^k F(s) - \sum_{i=1}^k s^{k-i} f^{(i-1)}(0^-)$
$\int_{-\infty}^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(t)dt$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t} \sin\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \zeta \leq 1$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega^2}$
$e^{-at} \sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Chap2—物理系统的数学模型

□代数方程求解→时域响应(拉普拉斯反变换)

部分分式展开(复变函数部分)

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \\ &= \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \dots + \frac{c_i}{s - s_i} + \dots + \frac{c_n}{s - s_n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - s_i} = \frac{B(s)}{A(s)} \end{aligned}$$

c_i 为 $F(s)$ 在极点 s_i 处的留数, 有

$$c_i = [(s - s_i)F(s)]_{s=s_i} \quad \text{or} \quad c_i = \left. \frac{B(s)}{A'(s)} \right|_{s=s_i}$$

复数根部分: 熟悉后可不展开, 直接对

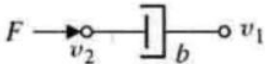
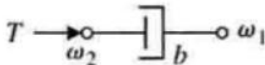
$$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$
$$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

作反拉普拉斯变换

Chap2—物理系统的数学模型

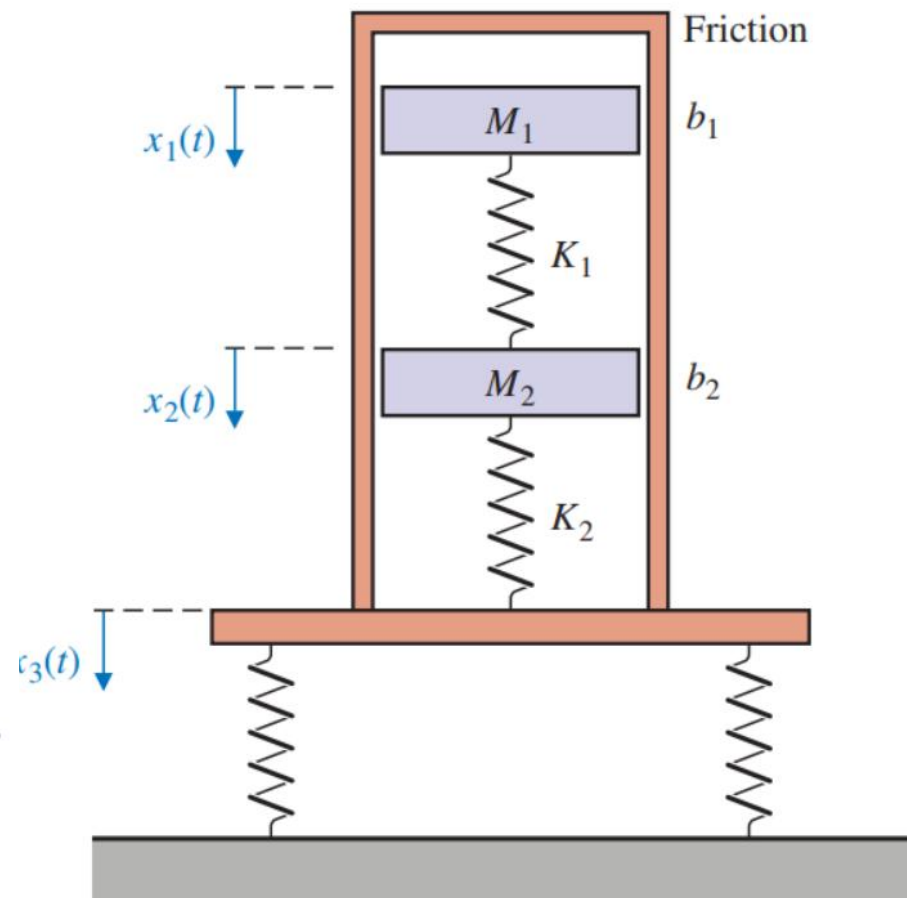
P2.16

□ 主要模型：弹簧-阻尼系统

平动阻尼器	$F = bv_{21}$	$\mathcal{P} = bv_{21}^2$	
旋转阻尼器	$T = b\omega_{21}$	$\mathcal{P} = b\omega_{21}^2$	

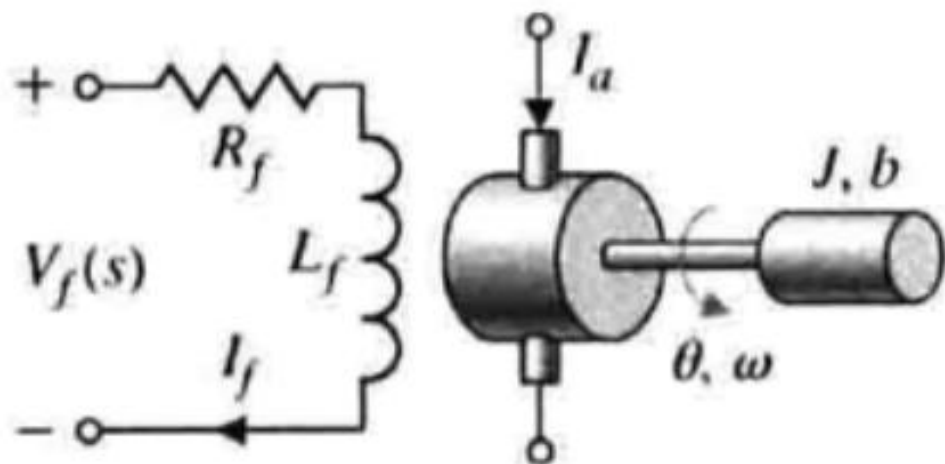
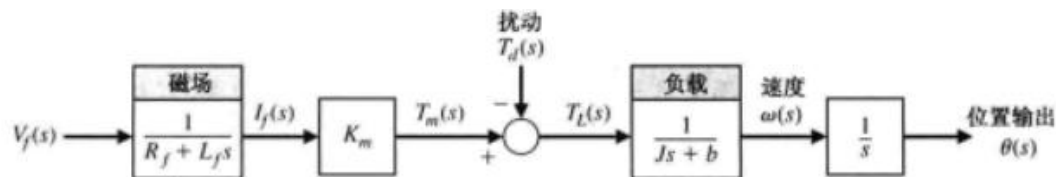
$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) \\ M_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_3) - k_1(x_2 - x_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) X_1(s) - K_1 X_2(s) &= b_1 s X_3(s) \\ -K_1 X_1(s) + (M_2 s^2 + b_2 s + K_1 + K_2) X_2(s) &= (b_2 s + K_2) X_3(s) \end{aligned}$$



Chap2—物理系统的数学模型

□ 主要模型：直流电机(磁场控制)



对磁场控制式电机，有

$$V_f(t) = R_f + L_f \frac{dI_f(t)}{dt}$$

电机扭矩与励磁电流有如下关系：

$$T_m(t) = K_m i_f(t)$$

负载转矩计算

$$T_L(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t)$$

以及加入扰动：

$$T_L(t) = T_m(t) - T_d(t)$$

最后显然

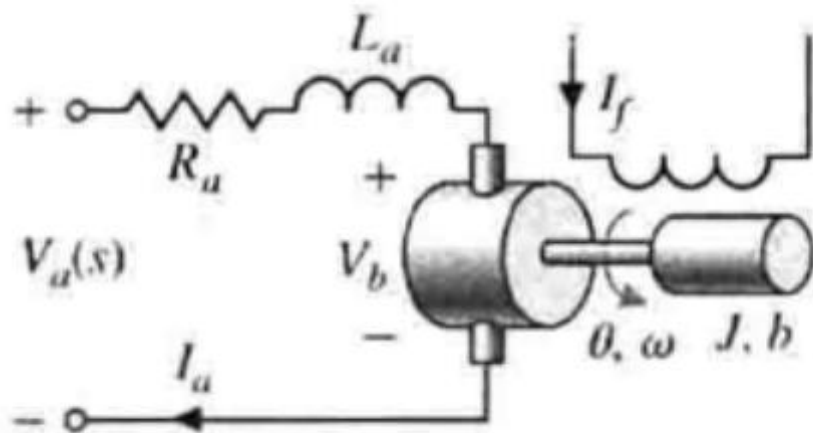
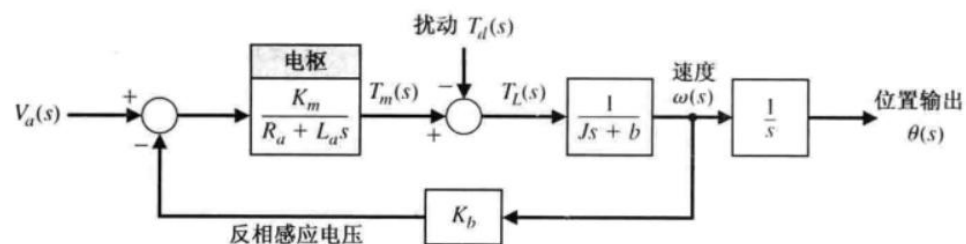
$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

经拉普拉斯变换后计算传递函数（不考虑 $T_d(s)$ ）

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)} = \frac{K_m / (bR_f)}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)}$$

Chap2—物理系统的数学模型

□ 主要模型：直流电机(电枢控制)



电机扭矩 T_m 与电枢电流 i_a 的关系为

$$T_m(t) = K_m i_a(t)$$

电枢电流与输入电压关系为

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t)$$

其中 v_b 为反电动势，与电机速度成正比

$$v_b(t) = K_b \omega(t)$$

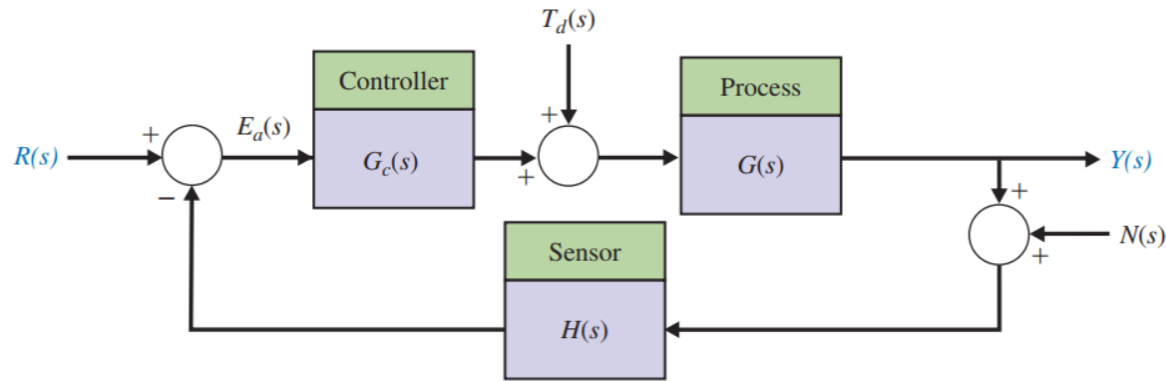
负载扭矩的关系式仍与磁场控制时相同

$$T_L(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + b\omega(t) = T_m(t) - T_d(t)$$

做拉氏变换并整理，得到不考虑 $T_d(s)$ 时的传递函数

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]}$$

Chap4—误差信号计算



- 阶跃信号: $r(t) = \begin{cases} A, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, R(s) = \frac{A}{s}$
- 斜坡信号: $r(t) = \begin{cases} At, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, R(s) = \frac{A}{s^2}$
- 抛物线信号: $r(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}t^2, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}, R(s) = \frac{A}{s^3}$

单位负反馈:

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_d(s) - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s)$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_d(s) + \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s)$$

$$= \frac{1}{1 + L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)}T_d(s) + \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s), L(s) = G_c(s)G(s)$$

这里的 $L(s)$ 定义为开环/环路传递函数, 在 $H(s)=1$ 时与前向通道传递函数相同。实际上 $L(s)=G_c(s)G(s)H(s)$

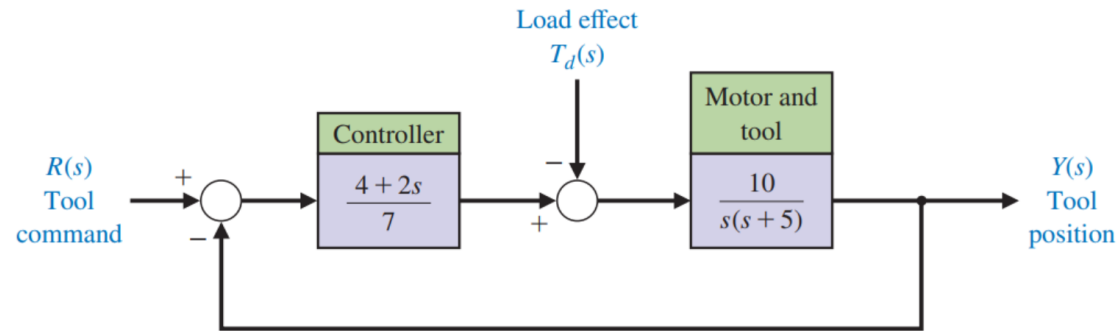
正负号问题: 默认系统的干扰和噪声项都为正输入. 负输入情况下对应系数自然改为负号.

至于分母中的正号 $1 + L(s)$ 在计算过程中来源为系统的负反馈, 只有正反馈时才为负号

Chap4—误差信号计算

例：AP4.3

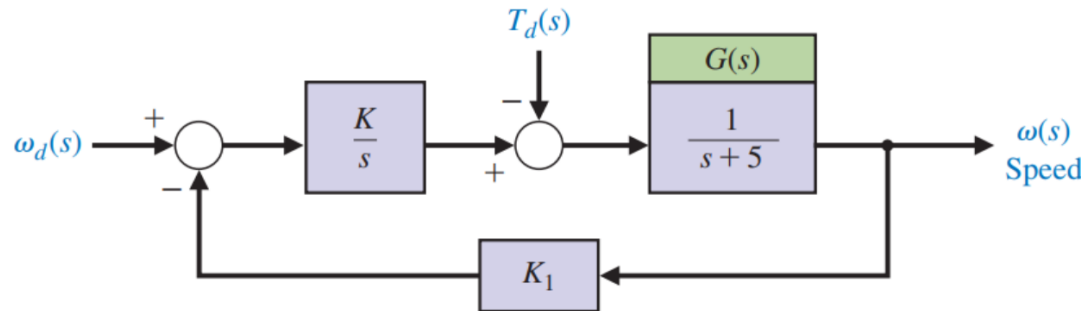
注意扰动 $T_d(s)$ 为负输入



$$Y(s)/T_d(s) = \frac{-70}{7s^2 + 55s + 40} \quad e_{ss} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{Y(s)}{T_d(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{70}{7s^2 + 55s + 40} = 1.75$$

DP4.3

稳态误差 e_{ss} 符号



$$T(s) = \frac{\omega(s)}{\omega_d(s)} = \frac{K}{s^2 + 5s + KK_1} \quad e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - T(s))\omega_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 5s + K(K_1 - 1)}{s^2 + 5s + KK_1} = 1 - \frac{1}{K_1}$$

$$|e_{ss}| \leq 0.01 \rightarrow 0.99 \leq K_1 \leq 1.01$$

Chap4—灵敏度计算

受控对象 $G(s)$: $S_G^T = \frac{G}{T} \frac{\partial T}{\partial G}$

对单位负反馈系统
 $T(s) = G_c(s)G(s) / 1 + G_c(s)G(s)$, 有: $S_G^T = \frac{G}{T} \frac{\partial T}{\partial G} = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}$

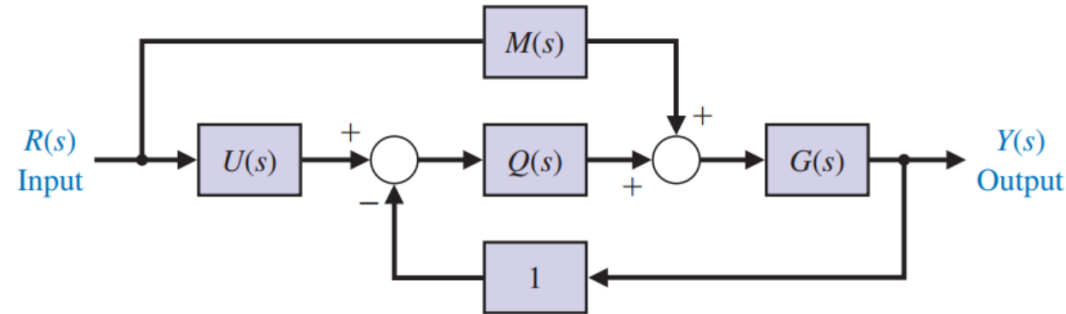
若对 $G(s)$ 中某一参数 α 求灵敏度, 使用链式法则: $S_\alpha^T = S_G^T S_\alpha^G$

简化计算: $S_\alpha^T = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial \ln N}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} - \frac{\partial \ln D}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = S_\alpha^N - S_\alpha^D$

Chap4—灵敏度计算

例：P4.4

简化计算过程

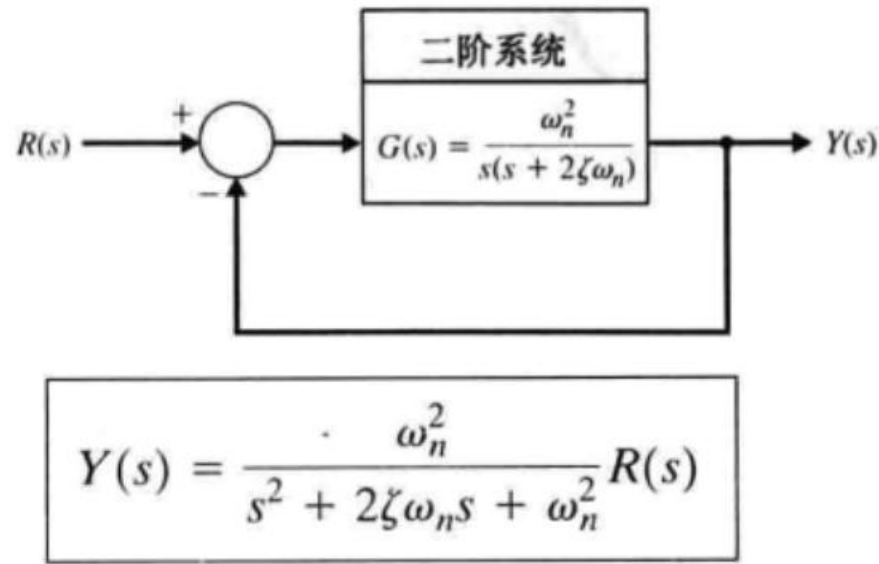


$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{MG(s) + UQG(s)}{1 + QG(s)}$$

$$S_G^T = S_G^N - S_G^D = 1 - \frac{QG(s)}{1 + QG(s)} = \frac{1}{1 + QG(s)}$$

Chap5—反馈控制系统性能计算

二阶(惯性)系统



单位阶跃响应:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta), \quad t \geq 0$$

单位冲激响应:

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t)$$

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \theta = \cos^{-1} \zeta$$

- Zeta=0: 无阻尼系统。闭环极点为虚轴上的共轭复极点，单位阶跃响应为等幅振荡，角频率为 ω_n ，称为无阻尼自然振荡频率；
- Zeta=1: 临界阻尼系统。闭环极点为一对重实极点，阶跃响应不振荡。
- Zeta>1: 过阻尼系统，闭环极点为实轴上不同实极点，阶跃响应不振荡；Zeta>>1时，靠近原点的极点成为主导极点，闭环系统接近一阶系统
- 0<Zeta<1: 欠阻尼系统



Chap5—反馈控制系统性能计算

- **稳：稳定性**，闭环系统必须是稳定的，并且具有足够的相对稳定性(稳定裕量)。一般希望，稳定性越强越好
- **准：准确性**，稳态响应的跟踪精度要高(稳态跟踪误差要小)，瞬态响应的跟踪精度要高(动态跟踪误差要小)。一般希望，跟踪精度越高越好、跟踪误差越小越好
- **快：快速性**，瞬态响应速度，与开环响应速度相比，有些系统要求加快闭环响应速度，有些系统要求减慢闭环响应速度。一般希望，在不影响稳定性、相对稳定性的前提下，闭环响应速度要尽可能快一些

快速性：上升时间 T_r ，峰值时间 T_p

稳定性：调节时间 T_s ，超调量 $P.O.$

欠阻尼系统：
$$T_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (2\% \text{ 允许误差带})$$

ζ 越小， T_r 、 T_p 越小，系统的快速性越好；

ζ 越大， $P.O.$ 、 T_s 越小，系统稳定性越好



Chap5——反馈控制系统性能计算

快速性：上升时间 T_r ，峰值时间 T_p

稳定性：调节时间 T_s ，超调量 $P.O.$

欠阻尼系统：
$$T_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (2\% \text{ 允许误差带})$$

ζ 越小， T_r 、 T_p 越小，系统的快速性越好；
 ζ 越大， $P.O.$ 、 T_s 越小，系统稳定性越好

准确性：稳态误差

$$G_c(s)G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + p_k)}$$

N ：系统的型数（积分器个数）

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

$G_c(s)G(s)$ 中积分器的个数，即系统的型数	输入信号		
	阶跃 $r(t) = A, R(s) = A/s$	斜坡 $r(t) = At, R(s) = A/s^2$	抛物线 $r(t) = At^2/2, R(s) = A/s^3$
0	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	∞	∞
1	$e_{ss} = 0$	$\frac{A}{K_v}$	∞
2	$e_{ss} = 0$	0	$\frac{A}{K_a}$

Chap5—反馈控制系统性能计算

附加零极点对系统的影响

- 附加极点：共轭复极点的实部 $\ll$ 负极点实部(10倍)，主导极点为共轭复极点，近似二阶系统；

响应更加平缓，响应速度减慢，超调量减小，过渡过程时间延长

- 附加零点：系统的零点离原点越近，零点对系统瞬态响应的影响越大

性能准则：ISE/IAE/ITAE/ITSE

T=time, S=square, A=absolute

阶跃输入ITAE最优：

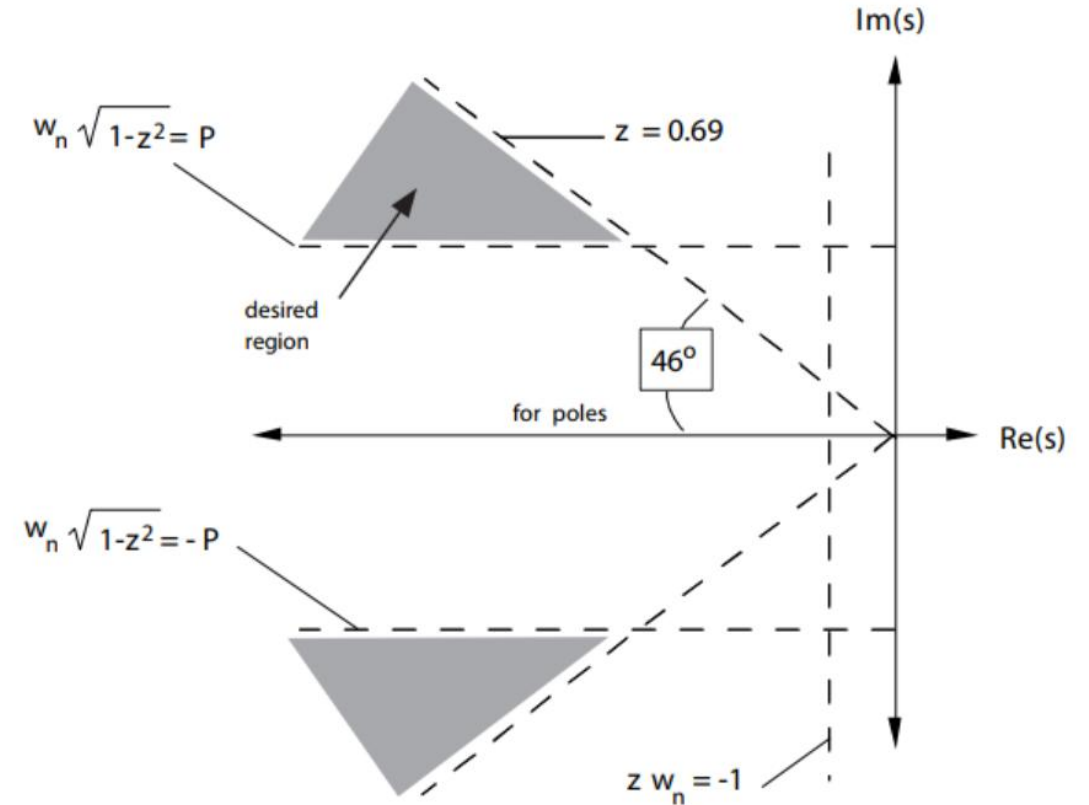
$$\begin{aligned} & \frac{s + \omega_n}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2} \\ & \frac{s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3}{s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4} \\ & \frac{s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5}{s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6} \end{aligned}$$

Chap5—反馈控制系统性能计算

例：E5.10 二阶系统闭环极点与参数对应

- $P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 5\% \rightarrow \zeta \geq 0.69$
- $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} < 4s \rightarrow \zeta\omega_n > 1$
- $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} < 1s \rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} > \pi$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$



Chap6——系统稳定性概念

研究对象：非线性定常系统

- 渐进稳定：零输入响应 ($r(t) = 0$), 在任何初始条件下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时系统输出及其各阶导数都为 0, 即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} y^{(n-1)}(t)$$

充要条件: 系统全部极点都位于开左半 s 平面, 即系统特征方程的根都具有负数实部。

- 临界稳定: 系统存在至少一个零实部极点, 其余极点都具有负实部 $\rightarrow$ 趋于常数/等幅振荡
- BIBO 稳定: 零状态稳定/外部稳定: 零初始条件下, 有界输入产生的输出响应也有界

$$y(0) = \dot{y}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

充要条件: 系统传递函数极点都位于开左半 s 平面 (不包括零极点对消极点)

渐进稳定反应系统的内在特性, 而 BIBO 稳定反应系统的外部特性. 渐进稳定系统是 BIBO 稳定的, 反之不一定成立

Chap6——劳斯-赫尔维茨判据

特征方程

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

必要条件：多项式系数同号；多项式不缺项
列劳斯表

$$\begin{array}{l|llll} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \end{array}$$
$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = -\frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}}{a_{n-1}}$$
$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

四种情形：

- (1) 首列中不存在零元素
- (2) 首列中出现零元素，零元素所在行中其余元素非零：用一个很小的正数 ε 来代替零元素，完成判定表后另 $\varepsilon \rightarrow 0$
- (3) 首列中有零元素，且零元素所在一行的其他元素均为0：辅助多项式
- (4) 在虚轴上有重根

劳斯-赫尔维茨稳定性判据

- 特征方程正实部根的个数，等于劳斯判定表第1列元素正负符号变化次数；
- 系统稳定的充分必要条件：劳斯判定表的第1列各个元素的正负号不会发生变化

Chap6---劳斯-赫尔维茨判据

例：P6.4 使用劳斯判据判断极点实部位置

(a) 特征方程： $s^3 + 75s^2 + (1250 + K)s + 100K$, 列出劳斯表:

s^3	1	$1250 + K$
s^2	75	$100K$
s^1	$1250 - \frac{K}{3}$	0
s^0	$100K$	

系统稳定条件： $0 < K < 3750$

(b) $K = 600$: 辅助多项式 $75s^2 + 100 * 3750 = 0, \rightarrow s = \pm j70.71$

(c) 相对稳定性判别: 移动s平面虚轴进行稳定性检验

本题判断复根实部在 $-4 \sim -5$ 之间, 则分别令 $s_0 = s + 4/s + 5$, 列劳斯表

s^3	1	1948	s^3	1	1825
s^2	63	116136	s^2	60	114250
s^1	104.57		s^1	-79.17	
s^0	116136		s^0	114250	

$s_0 = s + 4$ 处系统稳定: 极点实部位于 $s = -4$ 左侧;

$s_0 = s + 5$ 处系统不稳定: 极点实部位于 $s = -5$ 右侧。故得到了极点的实部范围

Chap7——根轨迹绘制

负增益根轨迹

步 骤	相关的方程或规则
1. 绘制根轨迹的准备工作。	$1 + KP(s) = 0$
(a) 列出闭环特征方程, 并将感兴趣的参数 K 改写为乘性因子。	$1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 0$
(b) 将 $P(s)$ 分解成有 M 个零点, n 个极点的分式形式。	$\times = \text{极点}, \circ = \text{零点}$
(c) 在 s 平面上用特定的符号标识 $P(s)$ 的零点和极点, 即开环零点和开环极点。	根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点。
(d) 确定根轨迹分支的 SL 条数。	当 $n \geq M$ 时, SL (Separate Loci, 独立根轨迹分支) = n ,
(e) 根轨迹分支关于实轴对称。	其中 n 为有限开环极点个数, M 为有限开环零点个数。
2. 确定实轴上的根轨迹段。	根轨迹段位于奇数个有限零点和极点的左侧
3. 根轨迹沿渐近线趋向于无穷远处的开环零点。渐近中心为 σ_A , 渐近线与实轴的交角为 ϕ_A 。	$\sigma_A = \frac{\sum (-p_j) - \sum (-z_i)}{n - M}$ $\phi_A = \frac{2k+1}{n-M} 180^\circ, k=0, 1, 2, \dots, (n-M-1)$
4. 确定根轨迹穿越虚轴的点(如果存在)。	应用劳斯-赫尔维茨稳定性判据(见 6.2 节)
5. 确定实轴上的分离点(如果存在)。	(a) 令 $K=p(s)$; (b) 确定 $dp(s)/ds=0$ 的根或者利用图解方法找到 $p(s)$ 的最大值点。
6. 应用相角条件, 确定根轨迹离开开环复极点的出射角和进入开环复零点的入射角。	当 $s = -p_j$ 或 $s = -z_i$ 时, $\angle P(s) = 180^\circ + k360^\circ$
7. 完成根轨迹的绘制。	

步骤	相关的方程或规则
1. 绘制根轨迹的准备工作	(a) $1 + KP(s) = 0$ (b) $1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 0$ (c) $\times = \text{极点}, \circ = \text{零点}$ (d) 根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点 当 $n \geq M$ 时, SL (separate loci, 独立根轨迹分支) = n , 其中, n 为有限开环极点个数, M 为有限开环零点个数
2. 确定实轴上的根轨迹段	根轨迹段位于偶数个有限开环零、极点的左侧
3. 根轨迹沿渐近线趋向于无限开环零点。渐近中心为 σ_A , 渐近线与实轴的交角为 ϕ_A	$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^M (-z_i)}{n - M}$ $\phi_A = \frac{K}{n-M} \frac{2k+1}{360^\circ}, k=0, 1, 2, \dots, (n-M-1)$
4. 确定根轨迹穿越虚轴的点(如果存在)	应用劳斯-赫尔维茨稳定性判据(见 6.2 节)
5. 确定实轴上的分离点(如果存在)	(a) 令 $K=p(s)$ (b) 确定 $dp(s)/ds=0$ 的根, 或者利用图解方法找到 $p(s)$ 的最大值点
6. 应用相角条件, 确定根轨迹离开开环复极点的出射角和到达开环复零点的入射角	当 $s = -p_j$ 或 $-z_i$ 时, $\angle P(s) = \pm k360^\circ$
7. 完成根轨迹的绘制	



Chap7——根轨迹绘制

两种标准型

首1标准型 $G(s) = \frac{K \prod (s + w_z)}{\prod (s + w_p)}$

尾1标准型 $G(s) = \frac{K \prod (\tau_z s + 1)}{\prod (\tau_p s + 1)}$

根轨迹部分，需要将 $P(s)$ 化为首一标准型

这一点在之后的Bode/Nyquist图绘制中还会提到



Chap7——根轨迹绘制

E7.2

根轨迹绘制示例

特征方程 $1 + \frac{K}{s(s+2)(s^2+4s+5)} = 0$, 两个实轴上极点 $0, -2$ 以及一对共轭复极点 $-2 \pm j, n = 4, M = 0 \Rightarrow SL = 4$;

实轴上根轨迹段: 在 0 左侧, 即 $0 - 2$ 段;

渐近线中心 $\sigma_A = -\frac{3}{2}$ 以及夹角 $\phi_A = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$;

虚轴交点: 特征方程: $s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 10s + K = 0$

• 劳斯判据: 列 routh 表

s^4	1	13	K
s^3	6	10	
s^2	11.33	K	
s^1	b		

令 s^1 行元素为 0 , 即 $6K - 10 \cdot 11.33 = 0, K = 18.89$.

此时上一行辅助多项式 $U(s) = 11.33s^2 + 18.89 = 0$, 得到虚轴交点 $s = \pm j1.291$

• 直接求解: 带入 $s = j\omega$, 有 $(\omega^4 - 13\omega^2 + K) + j(-6\omega^3 + 10\omega) = 0$. 令实部和虚部都为 0 , 解得 $\omega = \pm 1.291, K = 18.89$, 与上一方法相同。

实轴分离点: $K = p(s) = -(s^4 + 6s^3 + 13s^2 + 10s)$.

令 $\frac{dp(s)}{ds} = -(4s^3 + 18s^2 + 26s + 10) = 0$, 有实数解 $s = -0.602$

对共轭复极点 $-2 \pm j$, 计算出射角:

计算极点 $-2 + j$ 出射角:

$$\theta + \angle(-2 + j - 0) + \angle(-2 + j - 2) + \angle(-2 + j - (-2 - j)) = 180^\circ + k360^\circ, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

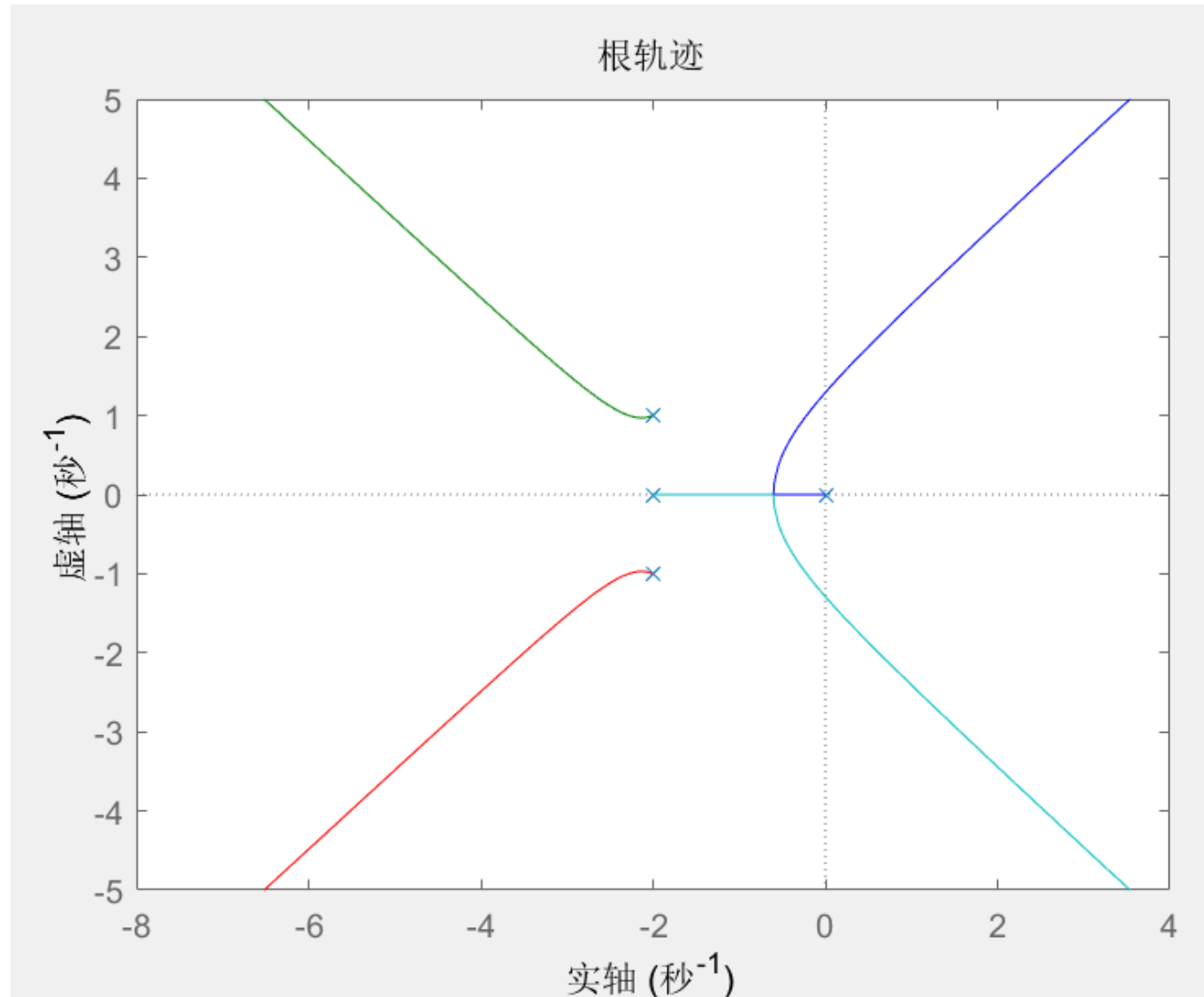
即

$$\theta = 180^\circ + k360^\circ - \arctan(1/2) - 90^\circ - 90^\circ = 207^\circ$$

另一半对称过去即可。完成绘制

Chap7——根轨迹绘制

例：E7.2 普通根轨迹作图



Chap7——根轨迹绘制

例：E7.16 负根轨迹作图 $1 + -K \frac{s-20}{(s+1)(s+20)} = 0$

特征方程 $1 + -K \frac{s-20}{(s+1)(s+20)} = 0$, 两个实轴上极点 $-1, -20$, 一个实轴上零点 $s = 20, n = 2, M = 1 \Rightarrow SL = 2$;

实轴上根轨迹段：分别在 $-20, 20$ 右侧，即 $-20 - 1$ 段， $20 + \infty$ 段；

这题 $N = n - M = 1$, 只有一条趋向于无穷处开环零点的根轨迹，自然渐近线与实轴夹角为 0° . 注意此处虽然未计算，但负增益根轨迹绘制出的第三步公式应为

$$\phi_A = \frac{2k}{n-M} 180^\circ, k = 0, 1, 2, \dots, n-M-1$$

虚轴交点：特征方程： $s^2 + (21-K)s + 20K + 20$

- 劳斯判据：列 routh 表

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 20K + 20 \\ s^1 & 21 - K & \end{array}$$

令 s^1 行元素为 0, 即 $21 - K = 0, K = 21$.

此时上一行辅助多项式 $U(s) = s^2 + 440 = 0$, 得到虚轴交点 $s = \pm j20.98$

- 直接求解：带入 $s = j\omega$, 有 $(20K + 20 - \omega^2) + j(21 - K)\omega = 0$. 令实部和虚部都为 0, 解得 $\omega = \pm j20.98, K = 21$, 与上一方法相同。

Chap7——根轨迹绘制

例：E7.16 负增益根轨迹作图

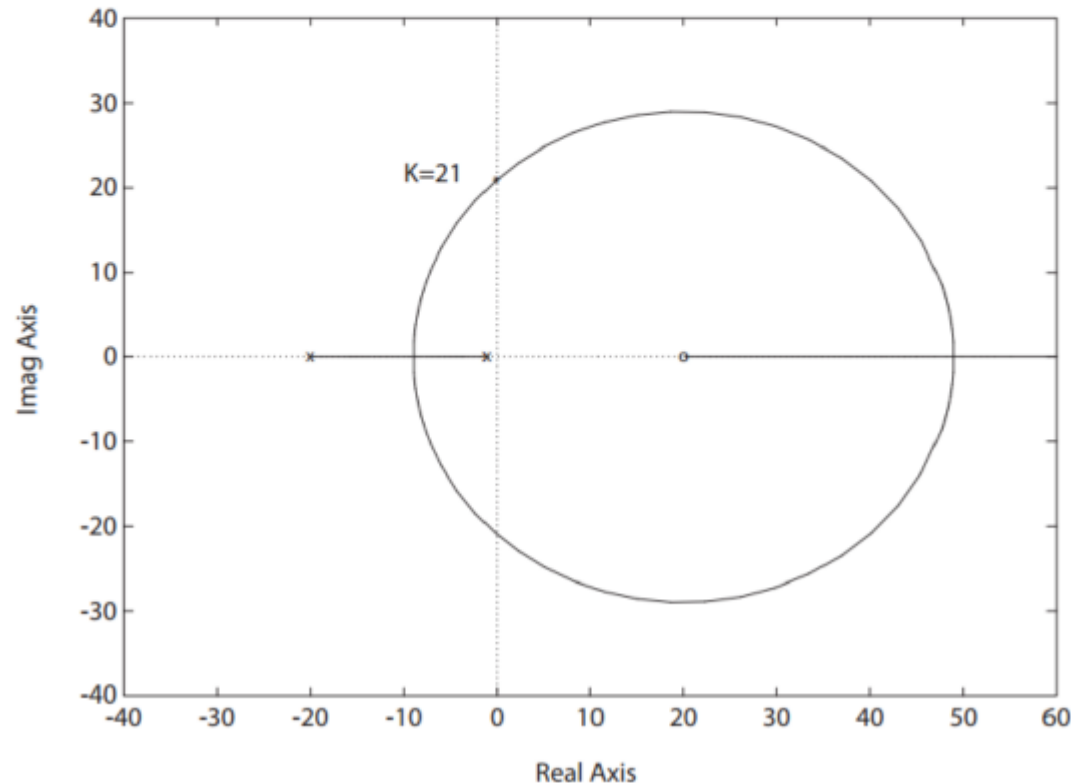
实轴分离点： $K = p(s) = \frac{(s+1)(s+20)}{s-20}$.

令 $\frac{dp(s)}{ds} = 1 - \frac{840}{(s-20)^2} = 0$, 有实数解 $s_1 = -9, s_2 = 49$, 考虑轨迹方向, 后者为汇合点

无复零极点, 无需计算出射/入射角

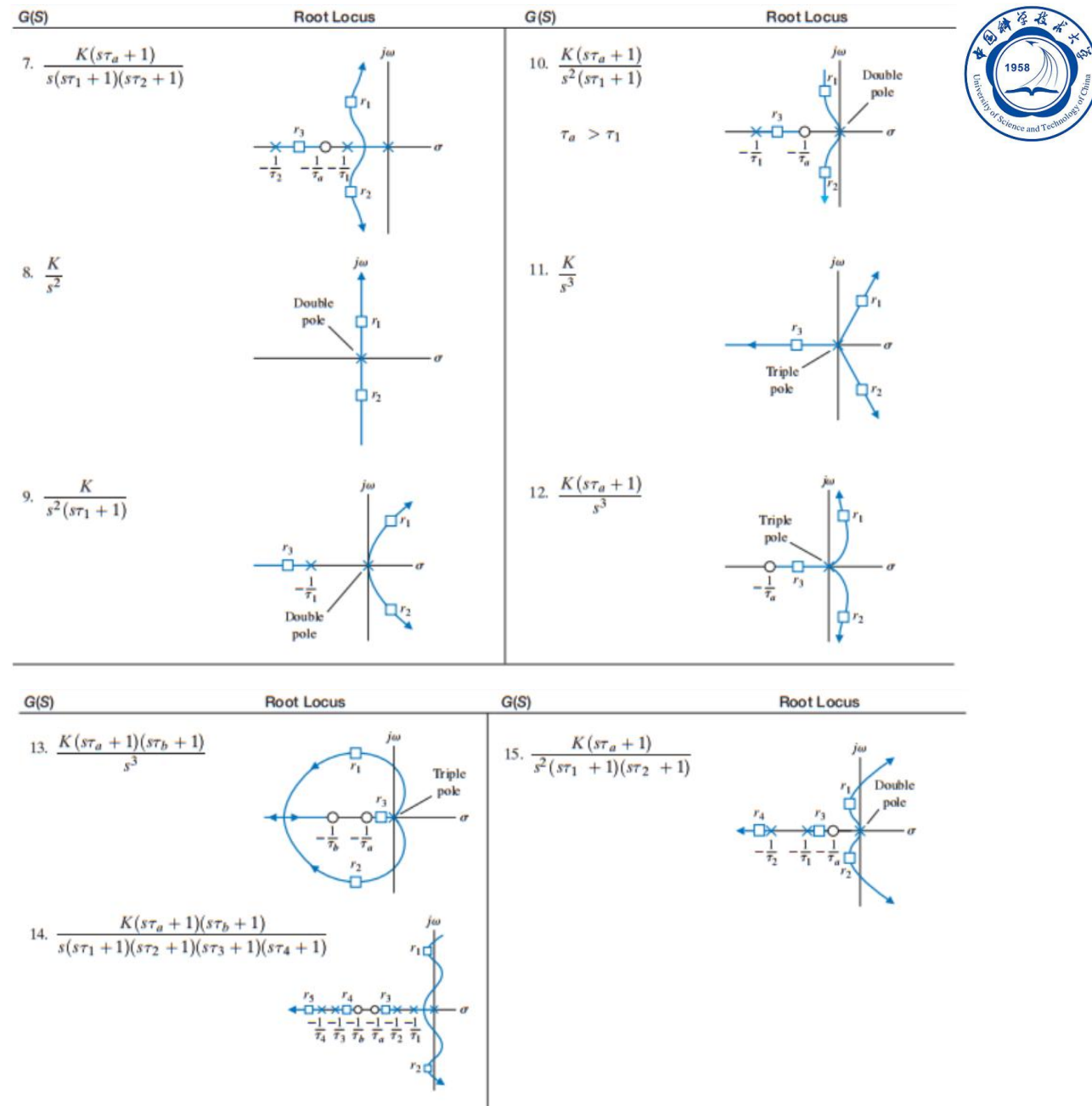
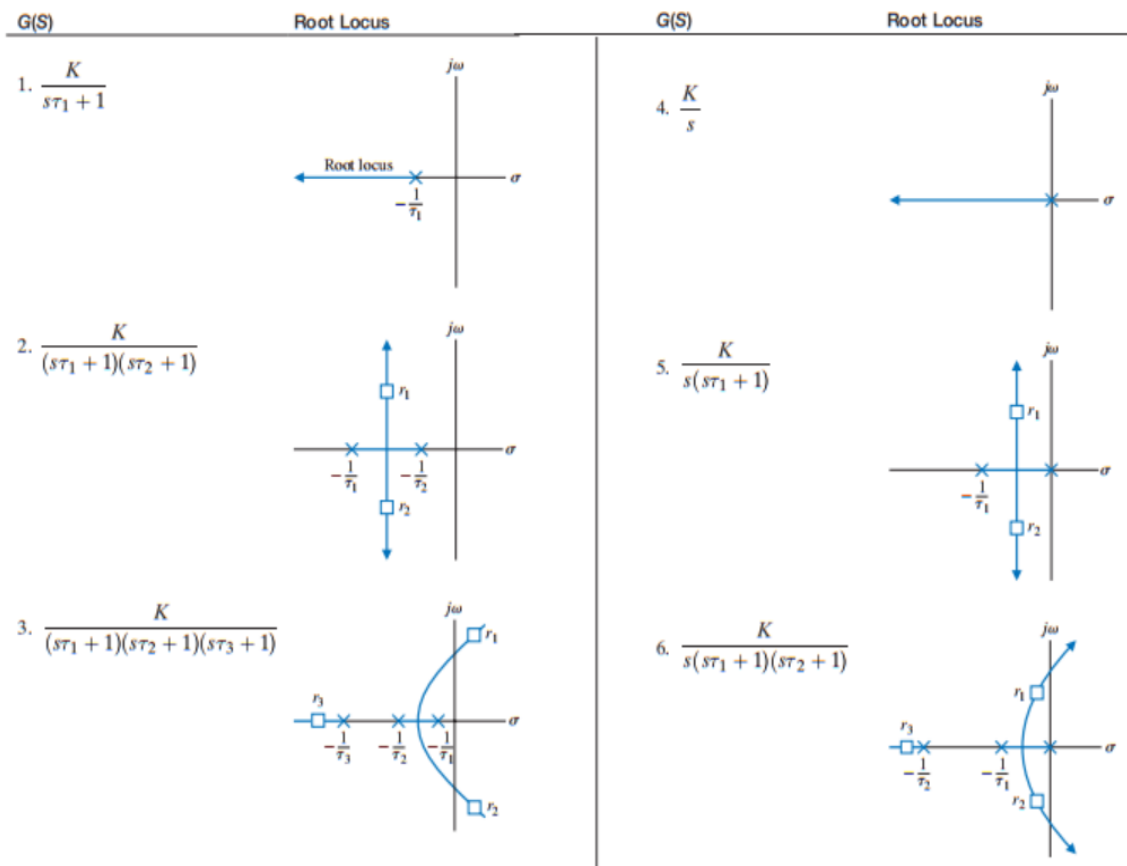
完成绘制

$$1 + -K \frac{s - 20}{(s + 1)(s + 20)} = 0$$



Chap7——根轨迹绘制

熟悉常用的根轨迹



Chap7&10——根轨迹整定PID参数

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

- 令 $K_I=0$ 、 $K_D=0$ ，得比例控制器Proportional (P) Controller:

$$G_c(s) = K_P$$

- 令 $K_D=0$ ，得比例积分控制器Proportional plus Integral (PI) Controller:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

- 令 $K_I=0$ ，得比例微分控制器Proportional plus Derivative (PD) Controller:

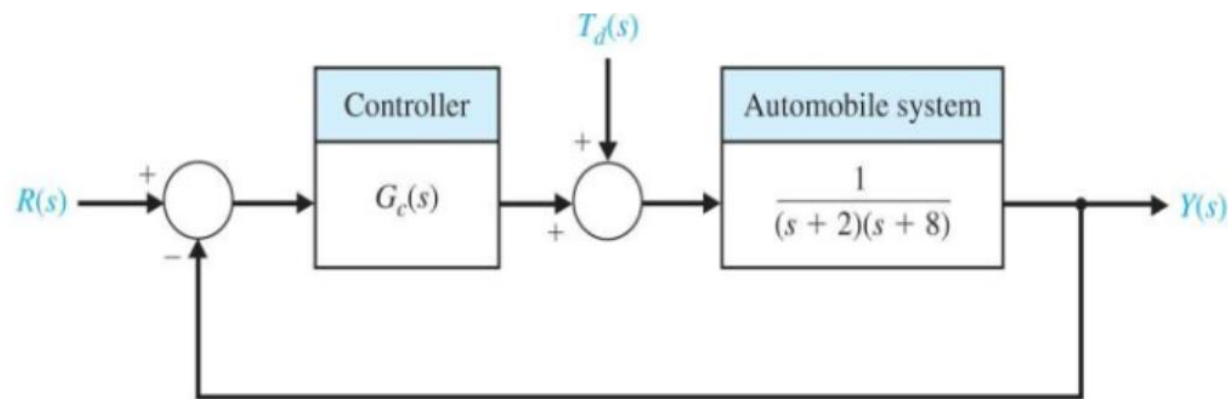
$$G_c(s) = K_P + K_P s$$

- PID控制器中的微分项在实际实现时采用:

$$G_d(s) = \frac{K_D s}{\tau_d s + 1} = \frac{K_D s}{\frac{K_D}{N} s + 1}, \quad \tau_d = \frac{K_D}{N}, \quad N \geq 10$$

PID增益	百分比超调量	调整时间	稳态误差
增大 K_P	增大	影响很小	减小
增大 K_I	增大	增大	稳态误差为0
增大 K_D	减小	减小	没有影响

Chap7&10——根轨迹整定PID参数



- DS1 阶跃输入稳态误差为零
- DS2 跟踪等速度输入信号时，稳态的位移误差在数值上小于设定值信号的速度幅值的25%
- DS3 阶跃输入的百分比超调量小于5%
- DS4 阶跃输入的调整时间小于1.5 s (2%准则)

【1】由 DS1，采用 PI 控制器

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)}$$

$$G_c(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{s + \frac{K_I}{K_P}}{s}$$

➤ 为满足DS2，速度误差系数为：

$$K_v = \frac{A}{e_{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \geq \frac{A}{0.25A} = 4$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_P \left(s + \frac{K_I}{K_P} \right)}{s} \frac{1}{(s+2)(s+8)} \quad K_I > 64$$

$$= \frac{K_I}{16} > 4$$

为满足DS3， $P.O. \leq 5\%$ ，阻尼比必须为 $\zeta \geq 0.69$

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 1.5$$

$$\text{则：} \zeta \omega_n \geq 2.6$$

Chap7&10——根轨迹整定PID参数

根轨迹法整定参数

➤ 闭环传递函数为：

$$T(s) = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 10s^2 + (16 + K_P)s + K_I}$$

DS4要求主导极点在 $S=-2.6$ 的左边。开环系统有3个极点， $S=0$ 、 -2 、 -8 ；1个零点， $S=-K_I/K_P$

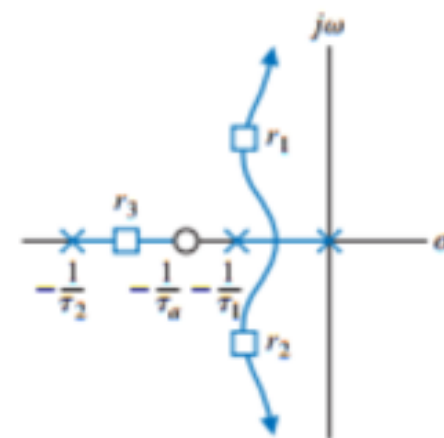
➤ 两条无穷远处根轨迹的渐近线的延长线与正实轴的夹角 $\Phi=-90^\circ$ 和 $+90^\circ$ ，因此必须保证渐近线的延长线与实轴交点的坐标 $\sigma_A < -2.6$ ，使两条根轨迹分支弯曲进入期望区域：

$$\sigma_A = \frac{\sum(-p_i) - \sum(-z_i)}{n - M} = \frac{-2 - 8 - \left(-\frac{K_I}{K_P}\right)}{2} = -5 + \frac{1}{2} \frac{K_I}{K_P}$$

$$< -2.6$$

$$\therefore \frac{K_I}{K_P} < 4.8$$

$$7. \frac{K(s\tau_d + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$



Chap7&10——根轨迹整定PID参数

稳定性判据

➤ 闭环传递函数为：

$$T(s) = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 10s^2 + (16 + K_P)s + K_I}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 16 + K_P \\ s^2 & 10 & K_I \\ s & \frac{10(K_P + 16) - K_I}{10} & 0 \\ 1 & 10 & K_I \end{array}$$

$$K_P > \frac{K_I}{10} - 16, \quad K_I > 0$$

综合结果，选取参数

$$\begin{aligned} K_I &> 64 \\ K_P &> \frac{K_I}{10} - 16 \\ \frac{K_I}{K_P} &< 4.8 \end{aligned}$$

$$G_c(s) = 26 + \frac{65}{s}$$

验证！

闭环主导极点是否为共轭复极点？（三阶极点、零点影响）
剩余约束条件 带回验算

Chap7&10——根轨迹整定PID参数

➤ 例10.5 单位负反馈温度控制系统

未校正系统传递函数：

$$G(s) = \frac{1}{(2s+1)(0.5s+1)} = \frac{1}{(s+0.5)(s+2)}$$

➤ 设计指标：

- 阶跃响应稳态误差为0
- 阶跃响应百分比超调量 $P.O. \leq 20\%$
- 按2%准则的调整时间 $T_s \leq 16/3$ 秒

➤ 采用PI校正，开环I型系统，满足第1个指标：

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \frac{s + \frac{K_I}{K_P}}{s}$$

➤ 按超调量指标，期望闭环主导极点阻尼比为：

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 20$$

$$\zeta \geq 0.46$$

➤ PI控制器的零点将成为闭环系统零点，增大超调量。为保证超调量，将期望闭环主导极点阻尼比选的稍微大一些，如 $\zeta=0.6$

➤ 按调整时间指标，期望主导极点实部为：

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq \frac{16}{3}$$

$$\zeta\omega_n \geq 0.75$$

➤ 取闭环系统期望主导极点为：

$$\zeta=0.6$$

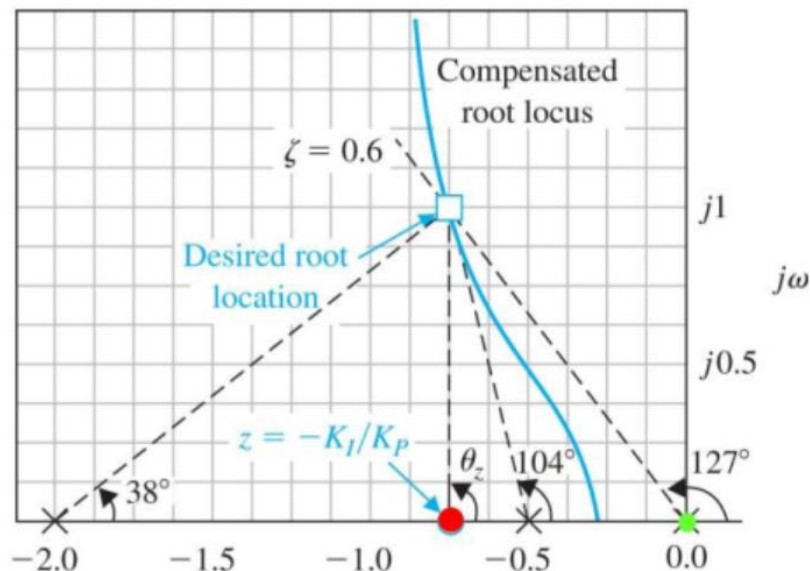
$$\zeta\omega_n=0.75$$

$$\omega_n=1.25$$

$$\begin{aligned} r_1, \hat{r}_1 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -0.75 \pm j1 \end{aligned}$$

Chap7&10——根轨迹整定PID参数

【1】配置 PI 控制器的零点



【2】确定根轨迹增益

$$K_P = \frac{1.25 \times 1.03 \times 1.6}{1.0}$$

由幅值条件得 $=2$

【3】验算

$$T(s) = \frac{K_P(s + \frac{K_P}{K_I})}{s(s + 0.5)(s + 2) + K_P(s + \frac{K_P}{K_I})} = \frac{2(s + 0.75)}{(s + 1.5)(s^2 + 1.5s + 1.56)}$$

绘制零极点图，三个极点到期望配置的闭环极点的夹角为 127° ， 104° ， 38°

由相角条件： $\theta_z - 127^\circ - 104^\circ - 38^\circ = -180^\circ$

得 $\theta_z = 89^\circ$ ，故配置 $\frac{K_P}{K_I} = -0.75$

其实完全不用画根轨迹，，，

Chap7&10---PID整定

Ziegler-Nichols整定—(这个真的会考吗)—这个真的会考

➤ 闭环Ziegler-Nichols整定规则

控制器类型	K_P	K_I	K_D
比例控制器P $G_c(s)=K_P$	$0.5K_U$	—	—
比例积分控制器PI $G_c(s)=K_P + \frac{K_I}{s}$	$0.45K_U$	$\frac{0.54K_U}{T_U}$	—
比例积分微分控制器PID $G_c(s)=K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$	$0.6K_U$	$\frac{1.2K_U}{T_U}$	$\frac{0.6K_U T_U}{8}$

- ① 系统闭环控制，设置 $K_I=0$ 、 $K_D=0$ ，采用纯比例控制器
- ② 增大 K_P ，注意观测系统输入、输出，直到系统达到临界稳定，产生幅值和周期不变的持续振荡
- ③ 记录此时的控制器比例增益，称为控制器的临界增益 K_U ultimate gain；振荡周期，称为系统的临界振荡周期 T_U ultimate period
- ④ 选定控制器类型，按照闭环Ziegler-Nichols整定规则计算PID控制器的各个增益

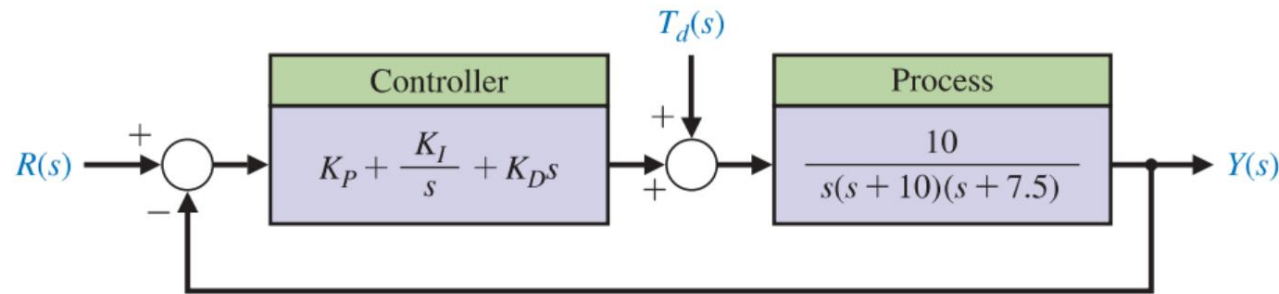
Chap7&10---PID整定

Ziegler-Nichols整定

AP7.14 Consider the unity feedback control system shown in Figure AP7.14. Design a PID controller using Ziegler–Nichols methods. Determine the unit step

response and the unit disturbance response. What is the maximum percent overshoot and settling time for the unit step input?

FIGURE AP7.14
Unity feedback loop with PID controller.



只保留P控制器, 找临界增益和临界震荡周期

劳斯表

$$L(s) = \frac{10K}{s(s + 7.5)(s + 10)}$$

$$1 + K \frac{10}{s(s + 7.5)(s + 10)} = 0 \Rightarrow s^3 + 17.5s^2 + 75s + 10K = 0$$

s3	1	75
s2	17.5	10K
s1	b1	0
s0	10K	

Chap7&10---PID整定 Ziegler-Nichols整定

K=131.25 时, $s^3 + 17.5s^2 + 75s + 1312.5 = (s^2 + 75)(s + 17.5)$

此时, 系统闭环传递函数为:

$$T(s) = \frac{1312.5}{(s^2 + 75)(s + 17.5)} = \frac{-\frac{210}{61}s + \frac{3675}{61}}{s^2 + 75} + \frac{\frac{210}{61}}{s + 17.5}$$

其中第二项为瞬态反应, 第一项对应 $\cos$ 的稳态响应, 且角频率为 $\omega = \sqrt{75} \text{ rad/s}$

故 $K_U = 131.25$ $T_U = \frac{2\pi}{\sqrt{75}} = 0.72 \text{ sec}$

(3) 套公式

$$K_P = 0.6K_U = 78.75 \quad K_I = \frac{1.2K_U}{T_U} = 218.75 \quad K_D = \frac{0.6K_U T_U}{8} = 7.0875$$

(4) 验证阶跃响应超调量、调节时间等。

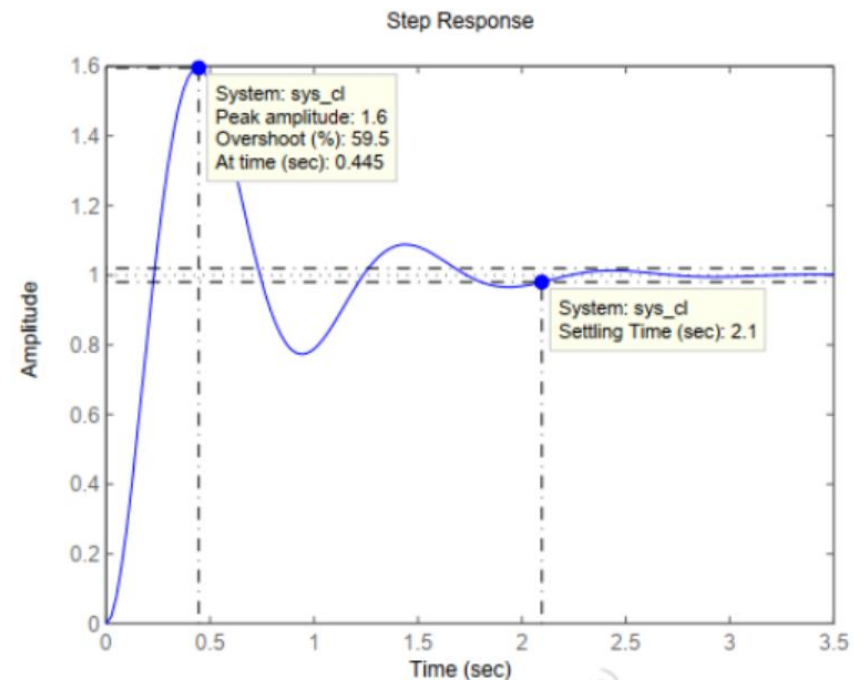
$$L(s) = \frac{10(7.0875s^2 + 78.75s + 218.75)}{s^2(s + 7.5)(s + 10)} = \frac{70.875(s + \frac{50}{9})^2}{s^2(s + 7.5)(s + 10)}$$

$$T(s) = \frac{70.875(s + \frac{50}{9})^2}{s^2(s + 7.5)(s + 10) + 70.875(s + \frac{50}{9})^2}$$

$$= \frac{70.875(s + \frac{50}{9})^2}{(s + 1.9 - j6.3)(s + 1.9 + j6.3)(s + 6.85 - j1.8)(s + 6.85 + j1.8)}$$

零极点都不能忽略。

可以降低标准, 假装可以近似二阶系统



Chap7&10---PID整定 Lambda整定

➤ λ整定法 (Lambda整定法):

被控对象	K_P	K_I	K_D
$\frac{K}{Ts+1}e^{-\tau s}$	$\frac{T}{K(\lambda+\tau)}$	$\frac{1}{K(\lambda+\tau)}$	—
$\frac{K}{s}e^{-\tau s}$	$\frac{1}{K(\lambda+\tau)}$	—	—
$\frac{K}{s(Ts+1)}e^{-\tau s}$	$\frac{1}{K(\lambda+\tau)}$	—	$\frac{T}{K(\lambda+\tau)}$

➤ 设定期望闭环系统传递函数为一阶惯性带纯滞后系统，闭环系统稳态增益为1:

$$T(s) = \frac{1}{\lambda s + 1} e^{-\tau s}$$

本质是泰勒展开近似

➤ 对纯滞后环节做Taylor展开，取一阶近似:

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{(-\tau s)^2}{2!} + \dots \approx 1 - \tau s$$



Chap8&9—Nyquist判据

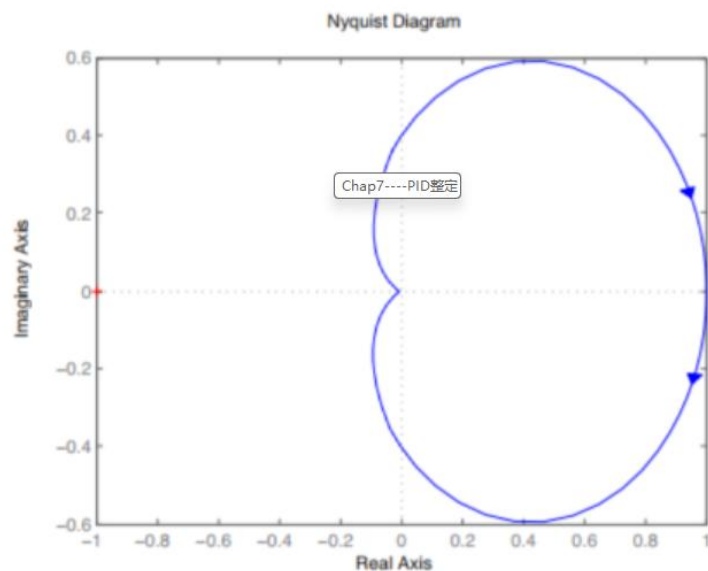
- $G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |G(j\omega)| \angle \Phi(\omega)$
 $\Phi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}, |G(j\omega)|^2 = |R(j\omega)|^2 + |X(j\omega)|^2$
- 画图的时候计算关键点，例如 $\omega=0$ 、 $+\infty$ 、与虚轴实轴的交点频率，分析曲线形状（可以记住一些经典系统的形状）。先画正半平面，然后负半平面对称过去，绕线方向相反
- 注意有无穷小半圆时的补线情况

Chap8&9---Nyquist判据

例： P8.1

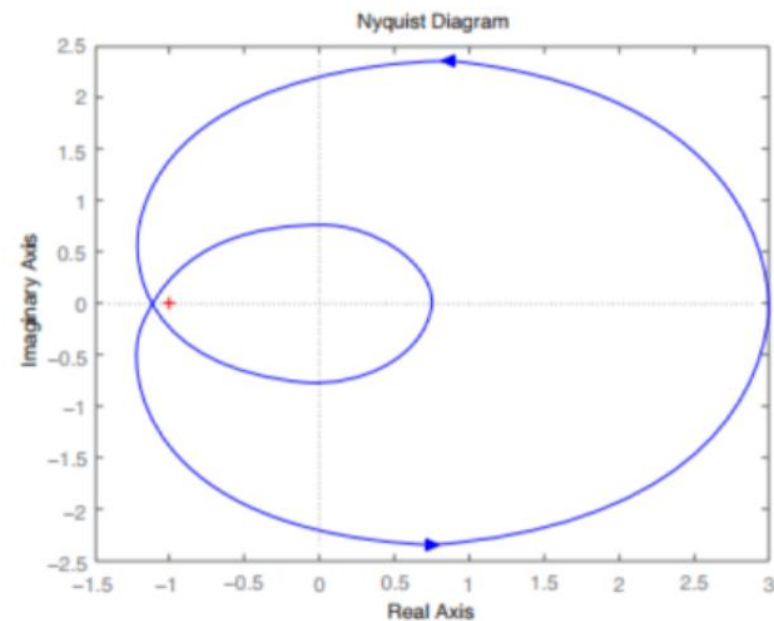
本题考察 Nyquist 图的绘制。首先列出关键点 ($\omega = 0/\infty; \varphi = 0/-90/-180^\circ$) 及其中间采样点的幅值与相角，再使用平滑曲线连接点。注意，Nyquist 图应当关于实轴对称。在画完 ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 的部分后，应补上它关于实轴对称的另一半，即 ω 从 $-\infty \rightarrow 0$ 。

(a)



ω	0	0.5	1	2	5	∞
$ G_c(j\omega)G(j\omega) $ (dB)	1	0.686	0.4	0.172	0.037	0
$\varphi(\omega)$ (deg)	0	-59.04	-90	-120.96	-152.49	-180

(b)



ω	0	0.5	1	2	5	∞
$ G_c(j\omega)G(j\omega) $ (dB)	0.75	0.749	0.9	1.59	2.60	3
$\varphi(\omega)$ (deg)	0	73.07	143.13	-135	-60.96	0

Chap8&9—Nyquist判据

从柯西定理到Nyquist稳定性判据:

- 柯西定理

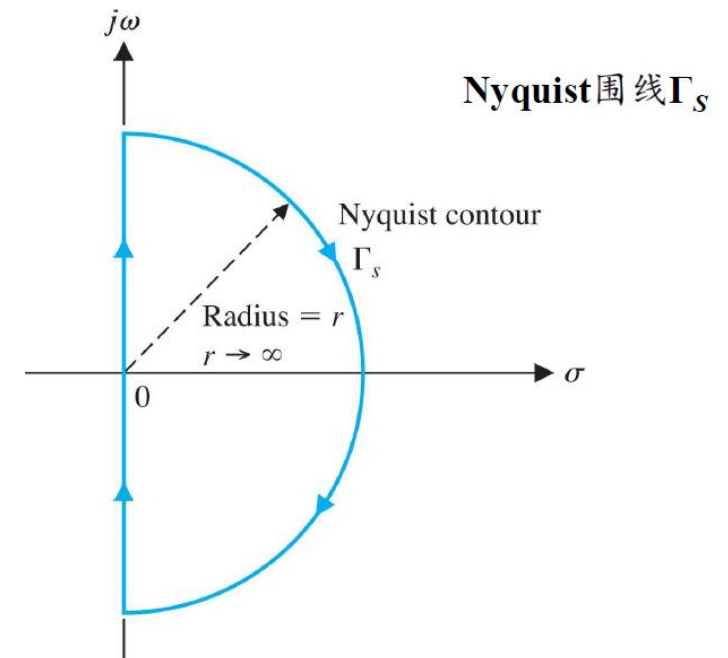
如果闭合曲线 Γ_s 以顺时针方向为正方向，在 s 平面上包围了 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，那么对应的映射像曲线 Γ_F 也以顺时针方向为正方向，且在 $F(s)$ 平面上包围原点 $N=Z-P$ 周

- $F(s)=1+L(s)$ 的零点即为闭环传递函数的极点
- 取一个特殊的围线包围 s 右半平面，由柯西定理 $Z=N+P$
 - Z : $F(s)$ 在 s 右半平面零点个数
 - N : $F(s)$ 围线顺时针包围原点周数
 - P : $F(s)$ 在 s 右半平面极点个数

稳定性要求: $N = -P$

- $L(s)=F(s)-1$ 。 $F(s)$ 围线包围原点 $(0, j0)$ ，即 $L(s)$ 包围 $(-1, j0)$
- 闭环反馈系统稳定的充要条件: $L(s)$ 在 s 平面上的映射像围线 Γ_L 沿逆时针方向包围 $(-1,0)$ 点的周数，等于 $L(s)$ 在右半平面内极点的个数。

再次注意: $L(s)=G_c(s)G(s)H(s)$ 开环传递函数



Chap8&9—Nyquist判据

- P9.3** (a) Find a suitable contour Γ_s in the s -plane that can be used to determine whether all roots of the characteristic equation have damping ratios greater than ζ_1 .
 (b) Find a suitable contour Γ_s in the s -plane that can be used to determine whether all the roots of the characteristic equation have real parts less than $s = -\sigma_1$.
 (c) Using the contour of part (b) and Cauchy's theorem, determine whether the following characteristic equation has roots with real parts less than $s = -1$:

$$q(s) = s^3 + 11s^2 + 56s + 96.$$

- P9.3** (a,b) The suitable contours are shown in Figure P9.3.

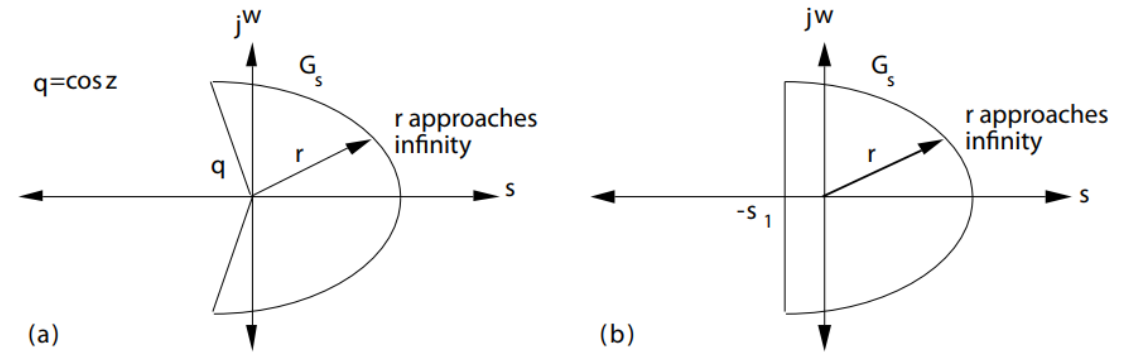


FIGURE P9.3
Suitable contours Γ_s for (a) and (b).

- (c) Rewrite the characteristic equation as

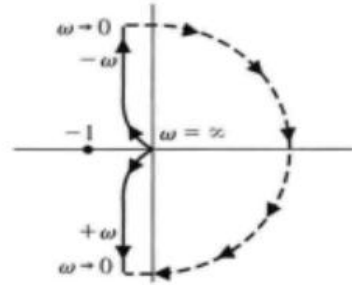
$$1 + \frac{96}{s(s^2 + 11s + 56)} = 0.$$

In this case, $-\sigma_1 = -1$. Therefore, we have one pole inside the contour at $s = 0$, so $P = 1$. The polar plot yields $N = -1$, so $Z = N + P = 0$. Therefore, all three roots have real parts less than -1 . In fact, the roots are $s_1 = -3$, and $s_{2,3} = -4 \pm j4$.

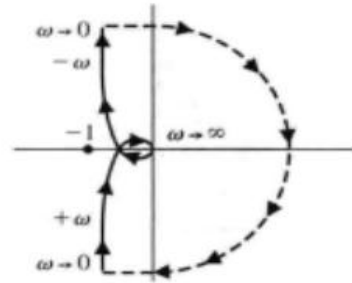
Chap8&9—Nyquist判据

$L(s)$ 极坐标图

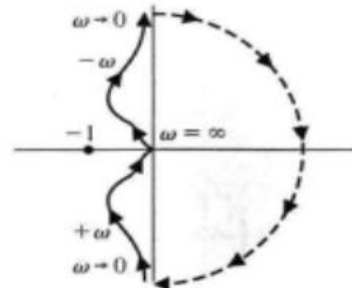
5. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)}$



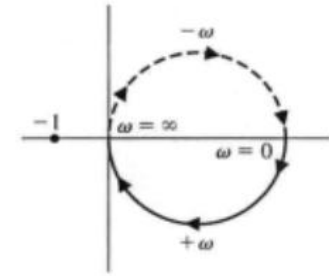
6. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$



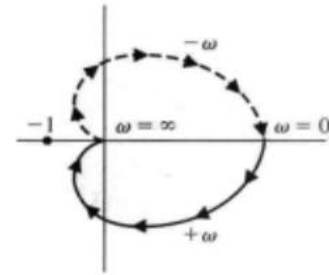
7. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$



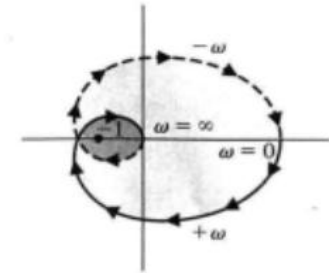
1. $\frac{K}{s\tau_1 + 1}$



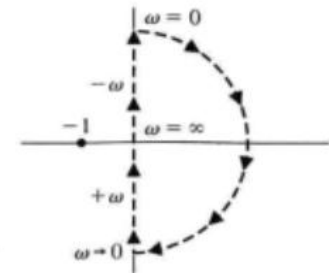
2. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$



3. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$

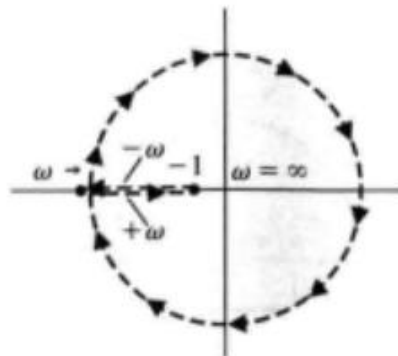


4. $\frac{K}{s}$



Chap8&9—Nyquist判据

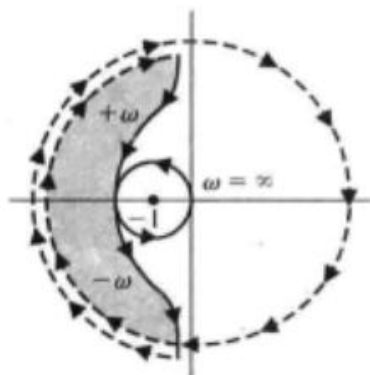
8. $\frac{K}{s^2}$



$L(s)$

极坐标图

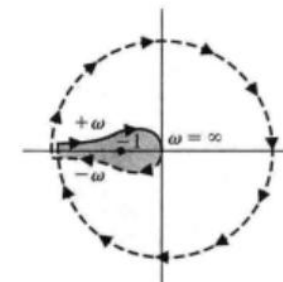
13. $\frac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s^3}$



$L(s)$

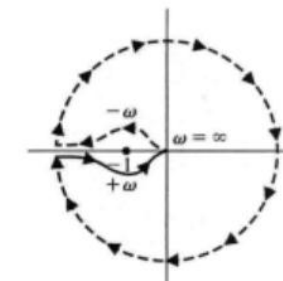
极坐标图

9. $\frac{K}{s^2(s\tau_1 + 1)}$

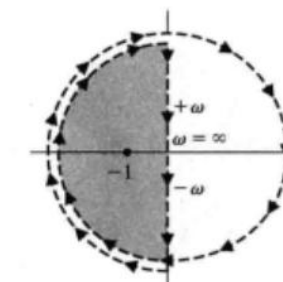


10. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)}$

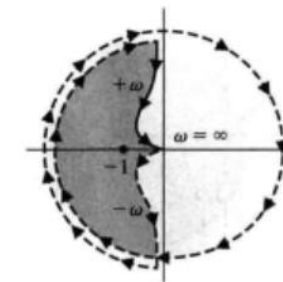
$\tau_a > \tau_1$



11. $\frac{K}{s^3}$



12. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^3}$



Chap8&9—Bode图

频率特性

$$G(s) = \frac{K_b \prod_{i=1}^Q (1 + \tau_i s) \prod_{l=1}^P \left(1 + \left(\frac{2\zeta_l}{\omega_{nl}} \right) s + \left(\frac{s}{\omega_{nl}} \right)^2 \right)}{s^N \prod_{m=1}^M (1 + \tau_m s) \prod_{k=1}^R \left(1 + \left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \right) s + \left(\frac{s}{\omega_{nk}} \right)^2 \right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_{i=1}^Q (1 + j\omega\tau_i) \prod_{l=1}^P \left(1 + \left(\frac{2\zeta_l}{\omega_{nl}} \right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nl}} \right)^2 \right)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^M (1 + j\omega\tau_m) \prod_{k=1}^R \left(1 + \left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right)}$$

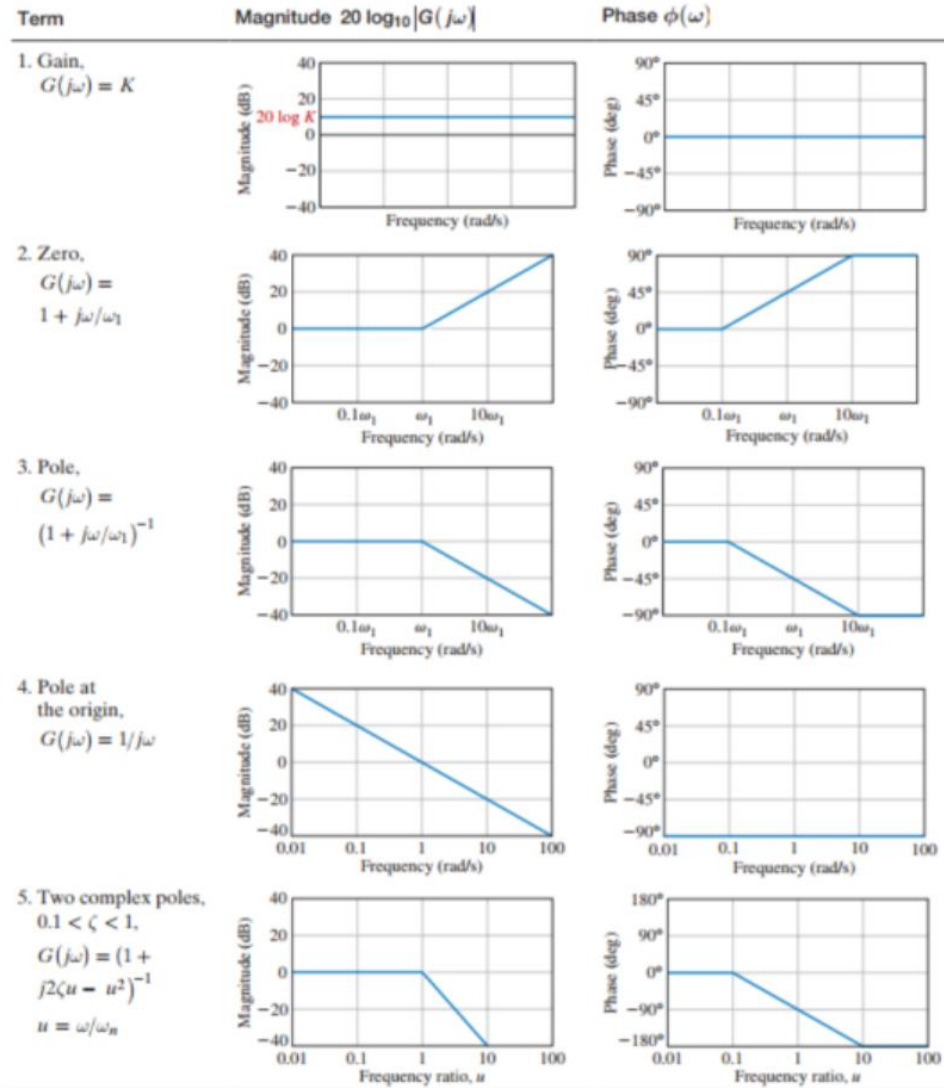
绘制Bode图/计算频域指标前，先将传递函数化为尾一标准型

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log K_b + 20 \sum_{i=1}^Q \log |1 + j\omega\tau_i| \\ &\quad + 20 \sum_{l=1}^P \log \left| 1 + \left(\frac{2\zeta_l}{\omega_{nl}} \right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nl}} \right)^2 \right| \\ &\quad - 20 \log |(j\omega)^N| - 20 \sum_{m=1}^M \log |1 + j\omega\tau_m| \\ &\quad - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= + \sum_{i=1}^Q \tan^{-1}(\omega\tau_i) + \sum_{l=1}^P \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_l \omega_{nl} \omega}{\omega_{nl}^2 - \omega^2} \right) \\ &\quad - N(90^\circ) - \sum_{m=1}^M \tan^{-1}(\omega\tau_m) \\ &\quad - \sum_{k=1}^R \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_k \omega_{nk} \omega}{\omega_{nk}^2 - \omega^2} \right) \end{aligned}$$

Chap8&9—Bode图

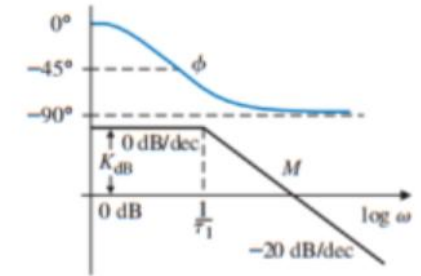
绘制：四种因子叠加



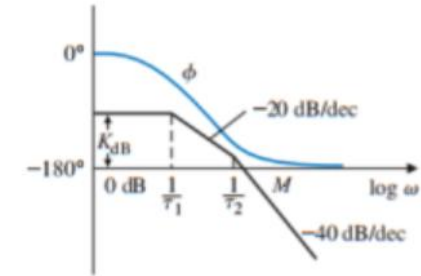
$G(s)$

Bode Plot

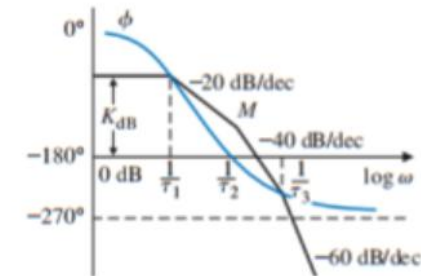
$$1. \frac{K}{s\tau_1 + 1}$$



$$2. \frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$

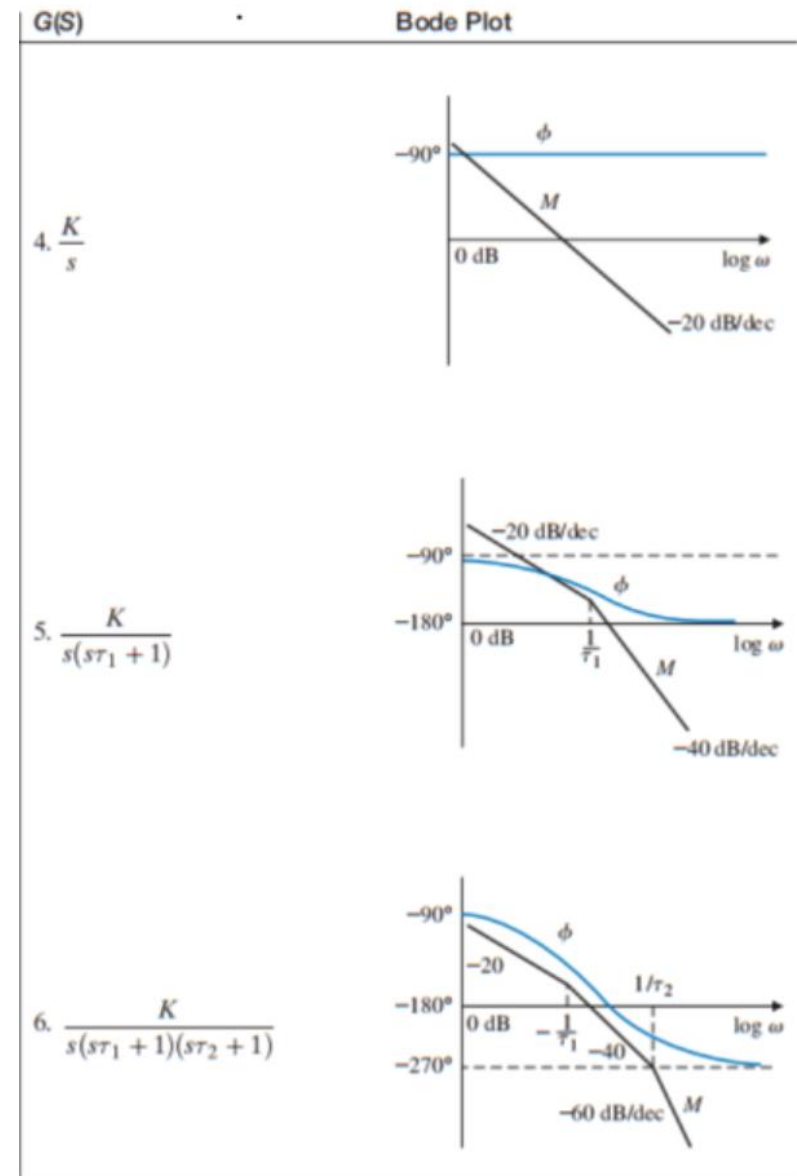
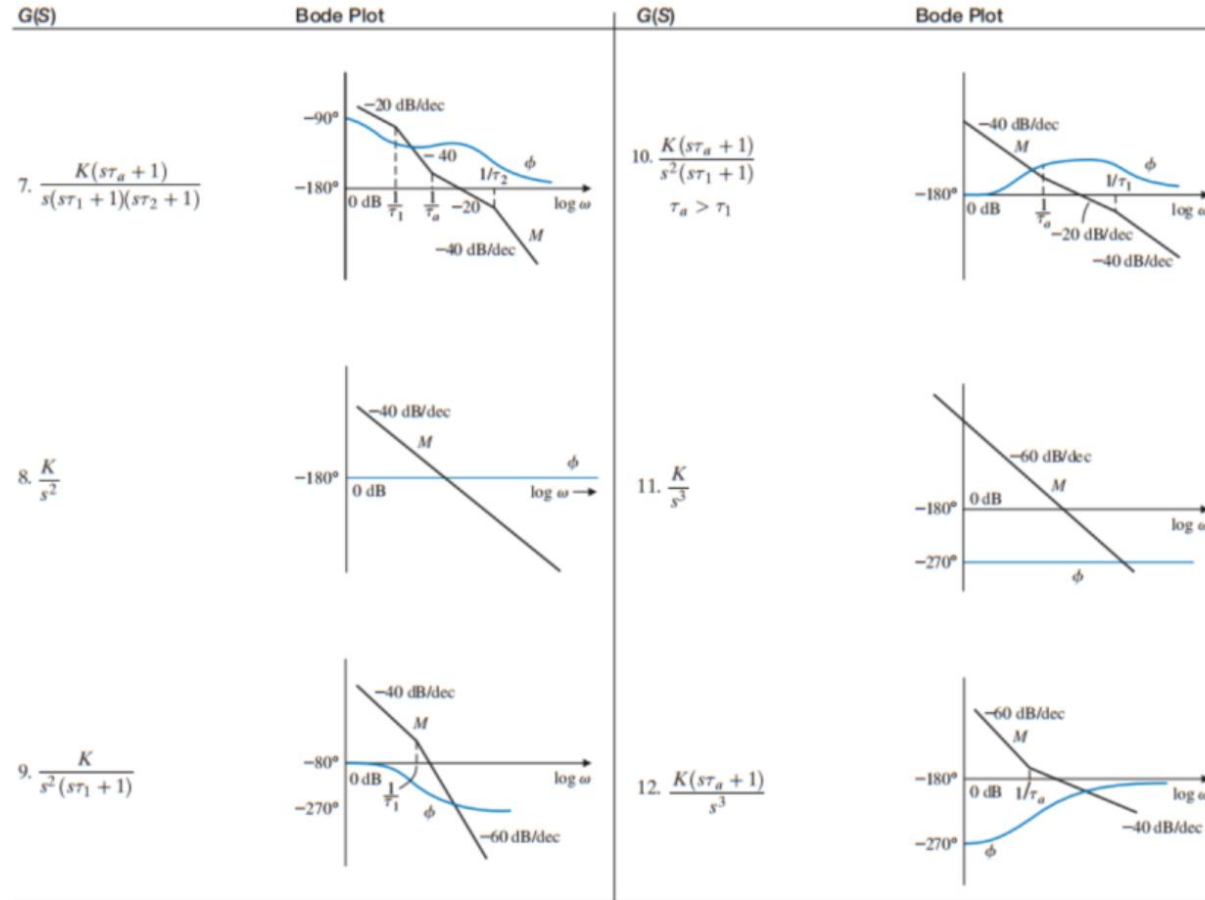


$$3. \frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$$



Chap8&9—Bode图

绘制：四种因子叠加



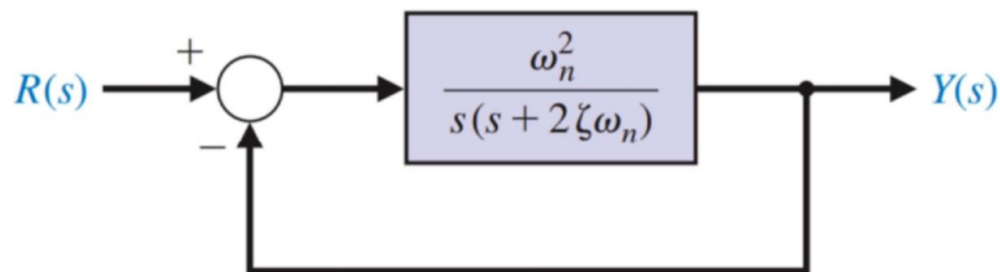
闭环:

- 谐振峰值 $M_{p\omega}$: 幅频特性的峰值, 表征系统的相对稳定性, $M_{p\omega} \uparrow$, 阻尼比 $\zeta \downarrow$, 阶跃响应超调量 $\uparrow$, 系统相对稳定性变差。
- 谐振频率 ω_r : 幅频特性到达谐振峰值的频率
- 带宽 ω_B 对数幅值增益从低频值下降 3dB 的对应频率 (大约为增益下降至 0.707 倍低频增益的频率), 衡量系统如实复现输入信号的能力。 $\omega_B \uparrow$, 阶跃响应上升时间 $\downarrow$. 影响因素包括无阻尼自然震荡频率 ω_n 和阻尼比 ζ 。

开环:

- 增益裕度G.M.: 在相位交界频率(稳态相移为-180度)的频率处, 为使系统到达临界稳定, 系统增益需要增加的倍数。
- 相位裕度P.M.: 在幅频特性 $|L(j\omega)|=1$ 的频率上, 在 $L(j\omega)$ 平面中, 使得其通过 $(-1, j0)$ 点所要旋转的相位角。

对典型二阶系统



$$\omega_B \approx 1.6\omega_c \quad (\text{经验公式、}\omega_c\text{为开环波德图穿越频率}) \quad 0.2 \leq \zeta \leq 0.8$$

开环传递函数

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

闭环传递函数

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

归一化带宽线性近似:

$$0.3 \leq \zeta \leq 0.8 \text{ 时, } \frac{\omega_B}{\omega_n} \approx -1.19\zeta + 1.85$$

$$\begin{aligned} \phi_{pm} &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} = 90^\circ - \arctan \left(\frac{1}{2\zeta} [(4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2]^{1/2} \right) \\ &= \arctan \frac{2}{[(4 + 1/\zeta^4)^{1/2} - 2]^{1/2}} \end{aligned}$$

$\xi \leq 0.7$ 时, 可以近似 $\xi = 0.01 * P.M.$

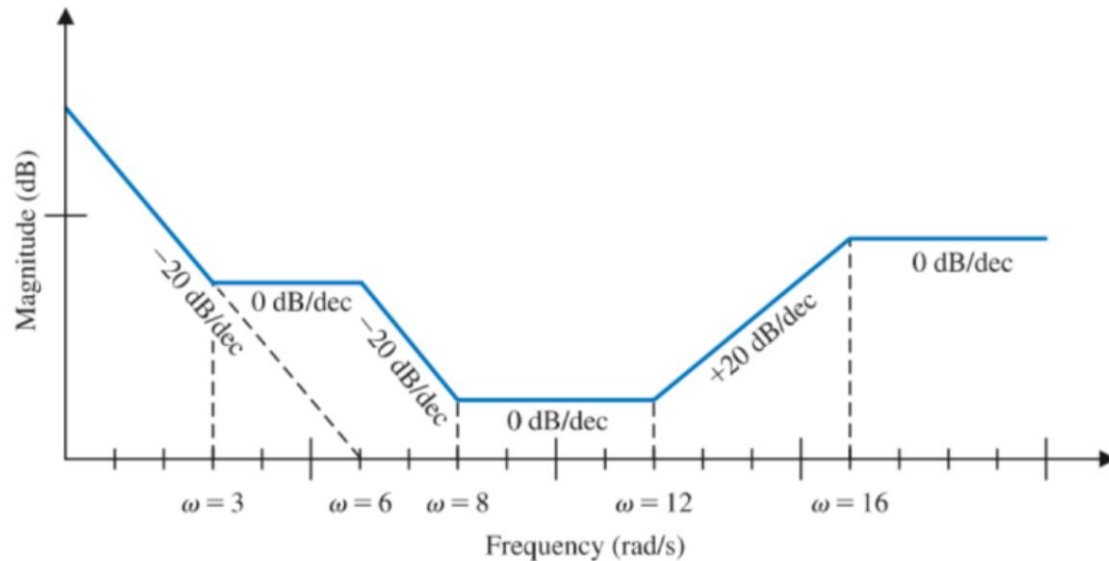
$$M_{p\omega} = \begin{cases} |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, & 0 \leq \zeta \leq 0.707 \\ 1, \zeta & > 0.707 \end{cases}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta < 0.707$$

$$M_{pt} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \zeta < 1$$

$$P.O. = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \zeta < 1$$

Chap8&9---Bode图



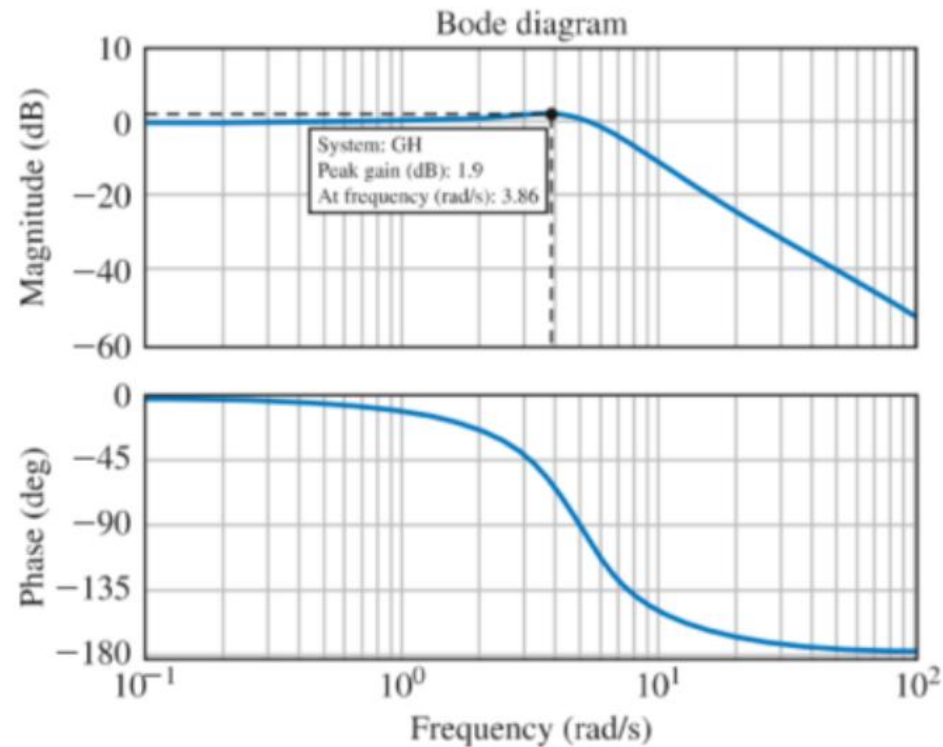
例：E8.5

Bode图幅值响应图计算传递函数

$G(s) = \frac{K(1+0.125s)(1+as)(1+bs)}{s(s+c)(1+s/16)}$, 系统包括三个零点和三个极点, 在 bode 图的幅值响应中表现为三处 $+20\text{dB/dec}$ 和 -20dB/dec 的变化。
 $+20\text{dB/dec}$ 的三个转折频率 $\omega = 3/8/12$ 对应三个零点, 则有 $a = 1/3, b = 1/12$;
 -20dB/dec 的三个转折频率 $\omega = 0/6/16$ 对应三个极点, 则有 $c=1/6$;

增益 K 一般情况下使用低频增益计算。在本题中, 存在原点处极点, 无法使用低频增益。考虑第一条斜率 -20dB/dec 的斜线, 即为仅受原点处极点影响的部分。其横截距为 $\omega = 6$. 由于这是只受原点处极点影响的部分, 故有 $20 \log \frac{K}{\omega} \big|_{\omega=6} = 0 \Rightarrow K = 6$

Chap8&9---Bode图



例：P8.19

二阶欠阻尼系统Bode图的关键点

关键点： $\phi = -90^\circ$ 对应 $\omega = \omega_n$ (因为二阶阻尼系统有相角 $\phi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega}{1-\omega^2}$), 得到 $\omega_n = 5$;

给定谐振频率 $\omega_r = 3.86 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, 得到 $\zeta = 0.45$.

故有

$$\frac{\theta(s)}{I(s)} = \frac{25}{s^2 + 4.5s + 25}$$

本题关键是根据 bode 图幅值响应图转折频率后直线斜率为 -40dB/dec 以及频率响应判断系统为二阶阻尼系统

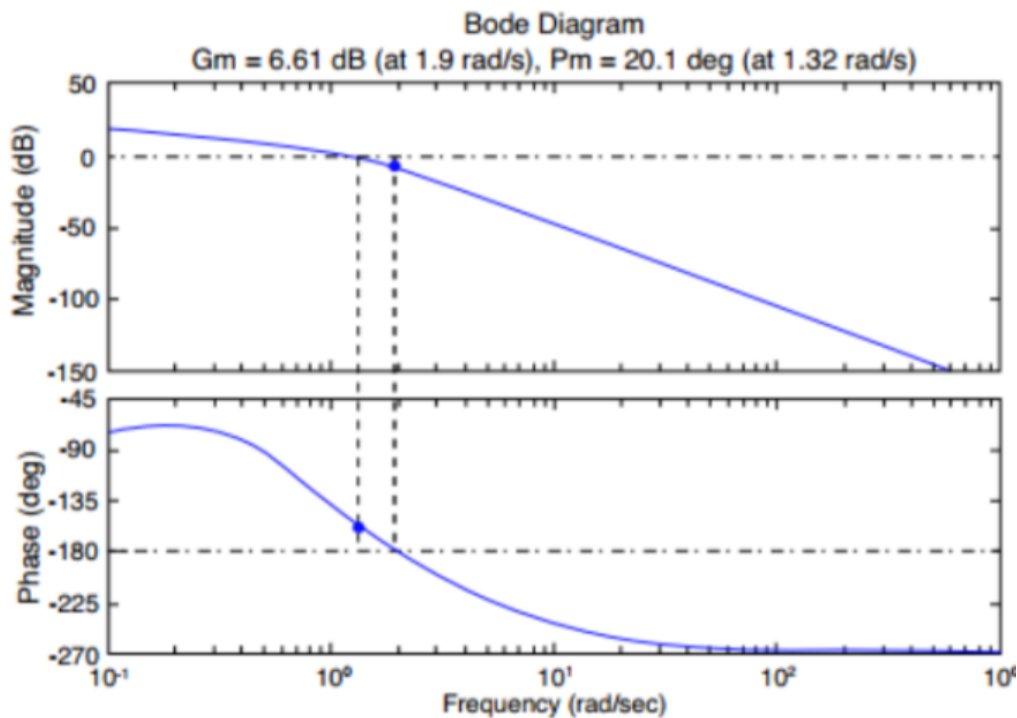
$$\frac{\theta(s)}{I(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Chap8&9---Bode图

例：E9.1

Bode图频率性能指标计算

$$L(s) = \frac{3(1+5s)}{s(4+s)(1+2s+s^2)}$$
 直接看图读数



$$G.M = 6.61dB, P.M. = 20.1^\circ$$

考试时的计算：

$$L(j\omega) = \frac{3(1+5j\omega)}{j\omega(4+j\omega)(1+2j\omega+2(j\omega)^2)}$$

计算相角：

$$\phi(\omega) = \arctan(5\omega) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{4}\right) - \arctan\left(\frac{2\omega}{1-2\omega^2}\right)$$

求解相位交越频率 ω_{pc} : 令 $\phi(j\omega) = -180^\circ$, 计算器解得 $\omega_{pc} = 0.63$.

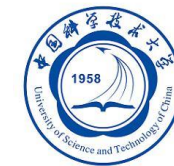
此处的幅值即为增益裕度 $G.M. = -20 \log |L(j0.63)| = 6.61dB$

求解增益交越频率 ω_{gc} : 令 $|L(j\omega)| = 1$, 计算器解得 $\omega_{gc} = 0.32$.

在增益交越频率处计算相角 $\phi(j\omega_{gc}) = \arctan(5 \cdot 0.32) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{0.32}{4}\right) - \arctan\left(\frac{2 \cdot 0.32}{1 - 2(0.32)^2}\right) = -159.9^\circ$

相位裕度 $P.M. = 180^\circ - 159.9^\circ = 20.1^\circ$

在使用计算器计算时，尤其注意弧度制与角度制的转换。计算 ω_{gc} 时，使用 solve 功能得到的解单位为 rad/s；而计算相位裕度时，结果要转为角度制。



Chap8&9---Bode图

$$L(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+6)}$$

(a) $K = 27$:

$$L(j\omega) = \frac{27}{j\omega(j\omega + 2)(j\omega + 6)}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right)$$

解 $\phi(\omega) = -180^\circ$, 得到相位交越频率 ω_{pc} . 这种简单的方程是可以手解的

$$-90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right) = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \tan\left(\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right)\right) = \tan 90^\circ = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{6}}{1 - \frac{\omega^2}{12}} = \infty$$

$$\Rightarrow \omega_{pc} = 2\sqrt{3}$$

计算

$$G.M. = -20 \log |L(j\omega_{pc})| = -20 \log \frac{27}{96} = 11dB$$

(b) 由 $G.M.$ 倒推传递函数.

$$|L(j\omega_{pc})| = 10^{-28/20} = 0.0398$$

相角 $\phi(\omega)$ 与 K 无关, 故仍有 $\omega_{pc} = 2\sqrt{3}$. 带入, 得到

$$K = |L(j\omega_{pc})| \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 3.8$$

例: E9.8

Bode图频率性能指标计算

对含多个实极点的相位交越频率计算, 可考虑使用三角函数正切和公式简化计算



Chap8&9—Bode图

例：E9.13

Bode图频率性能指标计算

注意近似公式的使用条件

标准二阶阻尼系统的参数计算

$$T(s) = \frac{200}{s^2 + 4s + 200} \Rightarrow \omega_n = 10\sqrt{2}, \zeta = \sqrt{2}/10.$$

$$\text{谐振峰值 } M_{p\omega} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.571 = 11.1\text{dB};$$

ζ 不满足 $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$, 无法使用线性近似式 $\omega_B = \omega_n(-1.19\zeta + 1.85)$, 这里我们直接算。

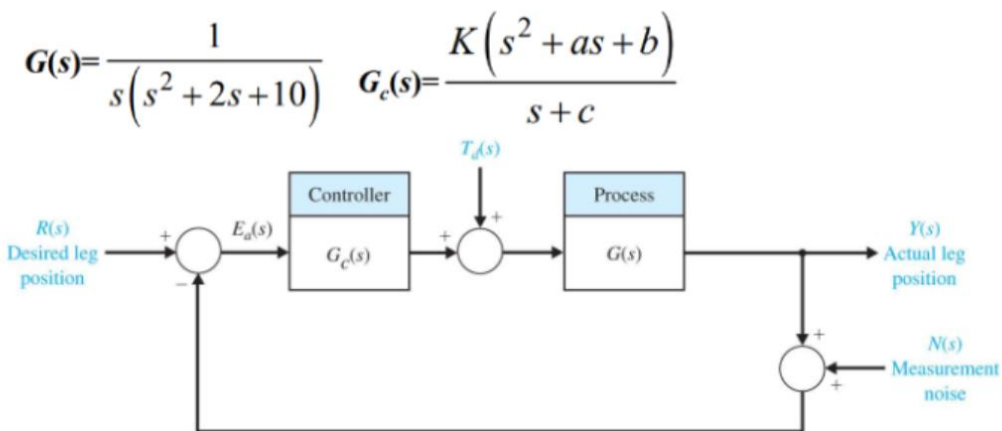
$$|T(j\omega_B)| = \frac{200}{\sqrt{(200 - \omega_B^2)^2 + 16\omega_B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

解得 $\omega_B = 2.166\text{rad/s}$.

$$\text{谐振频率 } \omega_r = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 14\text{rad/s}$$

$$\text{超调量 } P.O. = 100e^{\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 63.84\%$$

Chap10--Bode图整定PID



设计指标:

- **DS1:** 闭环带宽大于1Hz
- **DS2:** 阶跃输入百分比超调量小于15%
- **DS3:** 对阶跃输入信号的稳态跟踪误差为零

开环传递函数:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s^2 + 2s + 10)(s + c)}$$

闭环传递函数:

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

$$= \frac{K(s^2 + as + b)}{s^4 + (2+c)s^3 + (10+2c+K)s^2 + (10c+Ka)s + Kb}$$

闭环系统特征方程:

$$S^4 + (2+c)S^3 + (10+2c+K)S^2 + (10c+Ka)S + Kb = 0$$

- 闭环系统为四阶系统，选择参数 K 、 a 、 b 、 c ，使其中一个或者两个极点为主导极点，并配置到能够满足性能指标的位置

Chap10--Bode图整定PID

- 假设期望的特征多项式:

$$P_d(S) = (S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2)(S^2 + d_1 S + d_0)$$

- 选择 ζ 、 ω_n 满足性能指标, 使 $S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2 = 0$ 的根为主导极点, 它们与虚轴水平距离 $s = -\zeta\omega_n$
- 对 $S^2 + d_1 S + d_0 = 0$, 令: $d_1 = 2\alpha\zeta\omega_n$, $\alpha > 1$ 。如果为共轭复极点, 则与虚轴水平距离 $S = -\alpha\zeta\omega_n$
- 若取 $d_0 = \alpha^2 \zeta^2 \omega_n^2$, 则: $S^2 + d_1 S + d_0 = (S + \alpha\zeta\omega_n)^2 = 0$
- 这两个重实极点与虚轴的水平距离 $S = -\alpha\zeta\omega_n$ 。增大 α , 可以使这两个根远离虚轴和主导极点, 成为非主导极点
- 如 $\alpha = 12$, 非主导重实极点响应衰减快且无振荡

- 选非主导极点为重实极点, 特征多项式为:

$$\begin{aligned} S^4 + (2+c)S^3 + (10+2c+K)S^2 + (10c+Ka)S + Kb &= \\ = S^4 + 2\zeta\omega_n(1+\alpha)S^3 + \omega_n^2\{1+\alpha\zeta^2(4+\alpha)\}S^2 + \\ + 2\alpha\omega_n^3(1+\zeta^2\alpha)S + \alpha^2\zeta^2\omega_n^4 &= 0 \end{aligned}$$

- 对应项系数相等, K 、 a 、 b 、 c 为:

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n(1+\alpha) &= 2+c \\ \omega_n^2\{1+\alpha\zeta^2(4+\alpha)\} &= 10+2c+K \\ 2\alpha\omega_n^3(1+\zeta^2\alpha) &= 10c+Ka \\ \alpha^2\zeta^2\omega_n^4 &= Kb \end{aligned}$$

Chap10--Bode图整定PID

➤ 由性能指标DS1:

$$f_B = 1 \text{ Hz}$$

$$\omega_B = 2\pi f_B = 6.28 \text{ rad/s}$$

➤ 由百分比超调量指标DS2:

$$P.O. = 100 e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 15\%$$

$$\zeta \geq 0.52$$

可以选择 $\zeta = 0.52$

➤ 闭环系统主导极点的无阻尼自然振荡频率、闭环幅频特性谐振峰值、闭环幅频特性谐振频率为:

$$\omega_n = \frac{\omega_B}{-1.1961\zeta + 1.8508} = 5.11 \text{ rad/s}$$

$$M_{pw} = |T(\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.125, \zeta < 0.707$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$= 3.46 \text{ rad/s}, \zeta < 0.707$$

➤ 取 $\zeta = 0.52$, $\omega_n = 5.11$, $\alpha = 12$, 可得控制器:

$$K = 1239.2, a = 5.17, b = 21.48, c = 67.13$$

$$G_c(s) = 1239 \frac{s^2 + 5.17s + 21.48}{s + 67.13}$$

百分比超调量 P.O. = 14%, 调整时间 0.96 秒

Chap10--Bode图整定PID

DP8.7 考虑图 DP8.7 所示的控制系统，其中的控制器采用比例-积分-微分 (PID) 控制器。控制器的传递函数为

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

试设计确定该控制器的各项增益系数，使得系统满足：

- (a) 加速度误差常数 $K_a = 2$;
- (b) 相角裕度 P. M. $\geq 45^\circ$;
- (c) 系统带宽 $\omega_b \geq 3.0$ 。

并绘制闭环系统对单位阶跃输入信号的响应。

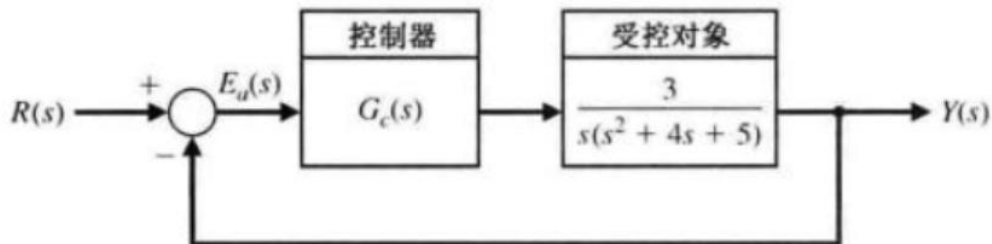


图 DP8.7 闭环反馈系统

开环传递函数: $L(s) = \frac{3(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s^2(s^2 + 4s + 5)}$

由指标 1, $K_a = \frac{3}{5} K_I = 2 \Rightarrow K_I = \frac{10}{3}$

闭环传递函数: $T(s) = \frac{3(K_D s^2 + K_P s + \frac{10}{3})}{s^2(s^2 + 4s + 5) + 3(K_D s^2 + K_P s + \frac{10}{3})}$

特征方程: $s^4 + 4s^3 + (5 + 3K_D)s^2 + 3K_P s + 10 = 0$

目标方程: $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + a\zeta\omega_n)^2 = 0$

Chap10--Bode图整定PID

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n(a+1) = 4 \\ a^2\zeta^2\omega_n^4 = 10 \\ \omega_n^2(1+4a\zeta^2+a^2\zeta^2) = 5+3K_D \\ 2a\zeta\omega_n^3(1+a\zeta^2) = 3K_P \end{cases}$$

近似为标准二阶系统后，就可使用近似公式转换条件二三：

条件二： $\zeta \approx 0.01 P.M. \geq 0.45$, 近似条件是 $\zeta \leq 0.7$;

条件三： $\omega_B \approx (-1.19\zeta + 1.85)\omega_n \geq 3.0$, 近似条件为 $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$

在加上为近似二阶系统保证主导极点的 $a \geq 10$, 联立选取一组满足不等式组的 ζ, ω_n 后即可代入求得 PID 控制器的剩余两个参数。

但在本题的数据中上述不等式组没有解。

尝试将剩余两极点从相同的实数解改为一对不影响主导极点的复数对：

特征方程写为

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)((s + a\zeta\omega_n)^2 + d), d > 0$$

其余过程同上，仍然无解。

验算！

Chap10—超前滞后校正-Bode图

• 超前校正

- 求出满足稳态误差要求的开环增益K值
- 根据求得K值，画出波德图，找到未校正系统的剪切增益频率 ω_{c1} ，相位裕量 PM_1 ，及增益裕量 GM_1
- 确定为了满足相位裕量，超前网络必须提供的相位超前量 φ_m ，

$$\varphi_m = PM_0 - PM_1 + \gamma$$

其中 PM_0 ， PM_1 分别为期望/原系统的相位裕量， γ 是加入了相位超前网络后，由于网络在中频和高频的增益提升，使剪切增益频率由 ω_{c1} 移动到 ω_{c2} 所带来的原系统相位的滞后量，一般为 $5-10^\circ$

即在计算 φ_m 时，在原有基础上再加 $5-10^\circ$

- 计算参数 α : $\sin\varphi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$
- 在提供最大超前相角的频率 ω_m 处，超前校正的增益为 $10\lg\alpha \text{ dB}$ ，确定未校正系统增益 $=10\lg\alpha \text{ dB}$ 的频率，该频率就是新的过零频率 ω_{c2} / ω_m
- 确定极点p和零点z: $\omega_m = \omega_{c2}, p = \omega_m\sqrt{\alpha}, z = \frac{p}{\alpha} = \omega_m/\sqrt{\alpha}$
- $G_C(s) = \frac{1+s/z}{1+s/p}$



Chap10--超前滞后校正-Bode图

➤ **例10.2** 一阶积分带一阶惯性系统的超前校正：
单位反馈系统回路传递函数：

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}, \quad H(s) = 1$$

$$L(s) = G_c(s)G(s)$$

➤ 设计指标：

■ 开环系统相位裕量 $\Phi_{PM} \geq 40^\circ$

■ 斜坡响应的稳态误差为斜坡速度的5%。有：

$$K_v = \frac{A}{e_{ss}} = \frac{A}{0.05A} = 20 = \frac{K}{2}, \quad K = 40$$

➤ 若满足稳态精度，未校正系统开环频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(0.5j\omega+1)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega+1)}$$

➤ 未校正系统开环幅频特性过零频率 ω_c 为 **6.2 rad/s**

$$\angle G(j\omega) = \Phi(\omega) = -90^\circ - \tan^{-1} 0.5\omega$$

$$\Phi(\omega_c) = -162^\circ$$

➤ 未校正的开环系统相位裕量 $\Phi_{PM} = 18^\circ$

➤ 增加超前校正，使校正后开环系统相位裕量在新的过零频率处提高到 **40°**。所需超前相角为：

$$40^\circ - 18^\circ = 22^\circ$$

➤ 引入超前校正，校正后开环系统过零频率将比未校正开环系统过零频率增大(新的过零频率右移)，未校正系统在新的过零频率处的相位滞后增加。选取最大超前相位时，应适当增加相位超前角：

$$\Phi_m = 22^\circ + 8^\circ = 30^\circ$$

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \sin \Phi_m = \sin 30^\circ = 0.5$$

$$\alpha = 3$$

➤ 选择校正后开环系统新的过零频率 ω_c 为校正网络最大超前相位频率 ω_m

➤ 在 ω_m 处，超前网络的增益为：

$$10 \log \alpha = 10 \log 3 = 4.8 \text{ dB}$$

➤ 在未校正开环系统Bode图上选增益为 **-4.8 dB** 处，对应的频率即为校正后开环系统过零频率 ω_m ：

$$\omega_m = \omega_c = 8.4$$

$$\text{校正网络零点: } z = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{8.4}{\sqrt{3}} \approx 4.8$$

$$\text{校正网络极点: } p = \alpha z = 3 \times 4.8 = 14.4$$

➤ 在 $\omega_c = 8.4$ 处，最终的开环系统相位裕量为：

$$\begin{aligned} \Phi(\omega_c) &= \angle G_c(j\omega_c)G(j\omega_c) \\ &= +\tan^{-1}(\omega_c/4.8) - 90^\circ - \tan^{-1} 0.5\omega_c - \tan^{-1}(\omega_c/14.4) \\ &= +60.2^\circ - 90^\circ - 76.5^\circ - 30.0^\circ \\ &= -136.3^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{PM} &= \Phi(\omega_c) - [-180^\circ] \\ &= 180^\circ + \Phi(\omega_c) \\ &= 43.7^\circ \end{aligned}$$

Chap10—超前滞后校正-Bode图

• 滞后校正

- 选择新的剪切频率点 ω_{c2} ，使得在 $\omega = \omega_{c2}$ 处，原系统相位滞后量为：

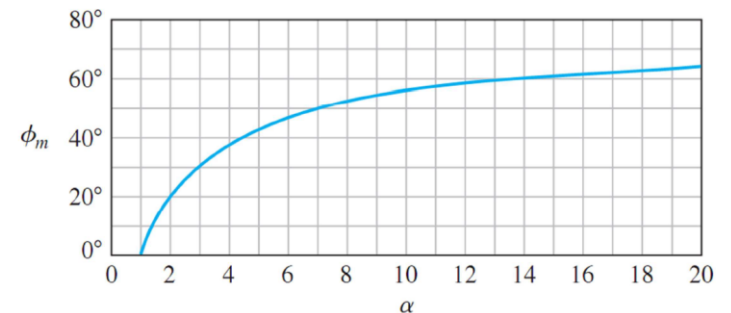
$$\varphi_m = PM_0 - 180^\circ + \gamma$$

γ 相位滞后网络在 $\omega = \omega_{c2}$ 点所引起的相位滞后量，一般为 $5-12^\circ$ 。即在计算 φ_m 时，在原有基础上再加 $5-12^\circ$

- 计算校正网络的b值，为了使在新的增益交界频率 ω_{c2} 处，幅频特性在此频率过零，滞后校正引入的增益衰减为 $-20\lg b$ ，由此计算b
- 确定极点p和零点z： $z = \omega_{c2}/10, p = z/b = \omega_{c2}/b$ ，

$$G_C(s) = \frac{s/z+1}{s/p+1}$$

- 如果计算的 $\varphi_m > 60^\circ$ or $\alpha > 15$ ，则不推荐采用单极超前校正网络



相位超前网络最大相位角 Φ_m 与 α 的关系



Chap10—超前滞后校正-根轨迹

• 超前校正

- 超前校正的**实零点**配置在期望闭环主导极点下方(或前两个开环实极点的左侧)
- 根据根轨迹**相角条件**，确定超前校正极点位置，使得在期望闭环极点处总角度为 $(2k+1)180^\circ$ ，使期望闭环极点位于校正后系统根轨迹上

• 滞后校正

- 在期望闭环主导极点处，计算环路增益、未校正系统稳态误差系数
- 比较未校正系统稳态误差系数、期望稳态误差系数，计算必须增大的增益份额，**这个增益由校正网络零点、极点比值 α 提供**
- 按校正网络零点、极点比值，在S平面原点附近的实轴上确定校正网络极零点位置，一般**实极点**选择 $-0.1 \sim -0.01$ （太大误差不能接受，太小则物理很难实现），使校正后根轨迹依然通过期望闭环极点。
- 用此方法校正后，根轨迹不能完全经过所要求的主导极点，会有一定偏差，但是可以接受

考试相关

• 必考

- 物理系统的数学模型(电机/电路/弹簧阻尼...)
- 系统稳定性判断: routh判据/根轨迹法/Nyquist判据
- 三图: Bode图 Nyquist图 根轨迹绘制
- PID参数整定:
 - 根轨迹法
 - Bode图法
 - Z-N整定
 - Lambda整定
- 超前滞后校正:
 - 根轨迹法
 - Bode图法

• 基础知识:

拉氏变换/反拉氏变换;
时域响应转换;
系统流程框图化简;
系统灵敏度计算/化简;
二阶系统时域响应、开闭环系统参数计算;



考试相关

- 可能会考：简答题

参考群文件/pksq文件：简答题复习

比较重要的有

- 工程上实现纯微分的方法及原因；
- 性能准则ISE/IAE/ITAE/ITSE及对应二阶的最优系统；
- PID参数整定对系统的定性影响；
- 其他名词解释；
- ...

祝大家考试顺利！



2025.06.13